Homomorphism Preservation Theorems de B. Rossman

2. Préliminaires (1/3)

Roger Villemaire

Département d'informatique
UQAM

Groupe de Travail HPT
30 janvier 2009

Plan

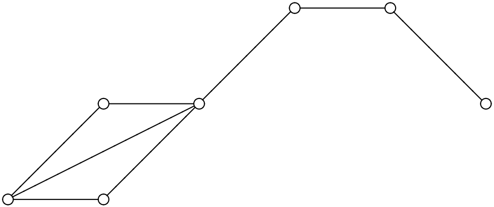
Structures

- Un *vocabulaire (relationnel)* est un ensemble fini $\{R_1, \ldots, R_m\}$ de symboles de relation d'arités déterminées $k_1, \ldots, k_m$.
- Une *structure* (sur un vocabulaire $\{R_1, \ldots, R_m\}$) est un objet $\mathbf{A} = \langle A, R_1^A, \ldots, R_m^A \rangle$, où A est un ensemble et $R_1^A, \ldots, R_m^A$ sont des relations d'arités correspondantes ($R_i^A \subseteq A^{k_i}$, pour $i = 1, \ldots, m$).

Structures

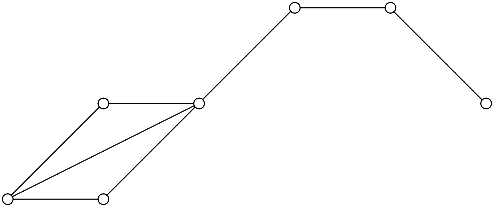
- Un *vocabulaire (relationnel)* est un ensemble fini $\{R_1, \ldots, R_m\}$ de symboles de relation d'arités déterminées $k_1, \ldots, k_m$.
- Une *structure* (sur un vocabulaire $\{R_1, \ldots, R_m\}$) est un objet $\mathbf{A} = \langle A, R_1^A, \ldots, R_m^A \rangle$, où A est un ensemble et $R_1^A, \ldots, R_m^A$ sont des relations d'arités correspondantes ($R_i^A \subseteq A^{k_i}$, pour $i = 1, \ldots, m$).

Graphes



- Le vocabulaire de la théorie des graphes est formé d'une seule relation binaire A(x,y) qui représente la présence d'une arête (ou d'un arc) entre les sommets x et y.
- Un graphe est la structure $\mathbf{G} = \langle S, A^G \rangle$, où S est l'ensemble des sommets du graphe et A^G la relation d'adjacence entre sommets.

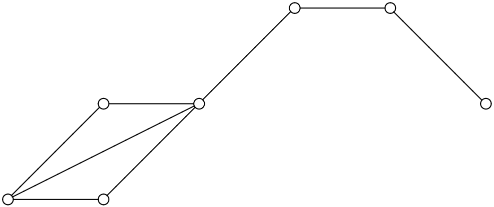
Graphes



- Le vocabulaire de la théorie des graphes est formé d'une seule relation binaire A(x,y) qui représente la présence d'une arête (ou d'un arc) entre les sommets x et y.
- Un graphe est la structure $\mathbf{G} = \langle S, A^G \rangle$, où S est l'ensemble des sommets du graphe et A^G la relation d'adjacence entre sommets.

UQÀM
Université du Québec à Montréal

Graphes



- Le vocabulaire de la théorie des graphes est formé d'une seule relation binaire A(x,y) qui représente la présence d'une arête (ou d'un arc) entre les sommets x et y.
- Un graphe est la structure $\mathbf{G} = \langle S, A^G \rangle$, où S est l'ensemble des sommets du graphe et A^G la relation d'adjacence entre sommets.

Sous-structures

- Une structure $\mathbf{B}$ est une *sous-structure* de $\mathbf{A}$ (noté $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$), si $B \subseteq A$ et $R^{\mathbf{B}} \subseteq R^{\mathbf{A}}$ pour toute relation R du langage.
- Une structure $\mathbf{B}$ est une *sous-structure induite* de $\mathbf{A}$ (noté $\mathbf{A}|_B$), si $B \subseteq A$ et $R^{\mathbf{B}}$ est la restriction de $R^{\mathbf{A}}$ à B.

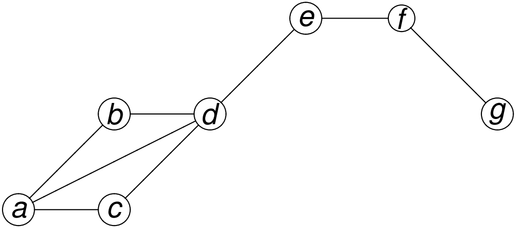
Sous-structures

- Une structure $\mathbf{B}$ est une *sous-structure* de $\mathbf{A}$ (noté $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$), si $B \subseteq A$ et $R^{\mathbf{B}} \subseteq R^{\mathbf{A}}$ pour toute relation R du langage.
- Une structure $\mathbf{B}$ est une *sous-structure induite* de $\mathbf{A}$ (noté $\mathbf{A}|_B$), si $B \subseteq A$ et $R^{\mathbf{B}}$ est la restriction de $R^{\mathbf{A}}$ à B.

Sous-structures

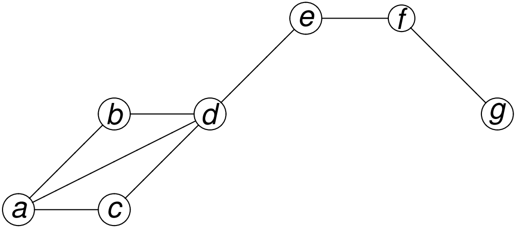
- Une structure $\mathbf{B}$ est une *sous-structure* de $\mathbf{A}$ (noté $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$), si $B \subseteq A$ et $R^{\mathbf{B}} \subseteq R^{\mathbf{A}}$ pour toute relation R du langage.
- Une structure $\mathbf{B}$ est une *sous-structure induite* de $\mathbf{A}$ (noté $\mathbf{A}|_B$), si $B \subseteq A$ et $R^{\mathbf{B}}$ est la restriction de $R^{\mathbf{A}}$ à B.

Sous-graphes



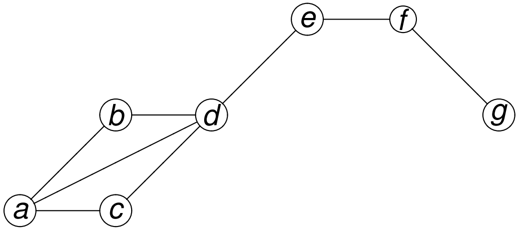
- Le graphe $\mathbf{H} = \langle \{a, b, d\}, \{(a, b), (b, a), (b, d), (d, b)\}$ est un sous-graphe de **G**. H n'est pas un sous graphe induit.
- Le sous-graphe induit sur l'ensemble $\{a, b, d\}$ est $\langle \{a, b, d\}, \{(a, b), (b, a), (b, d), (d, b), (a, d), (d, a)\}\rangle$.

Sous-graphes



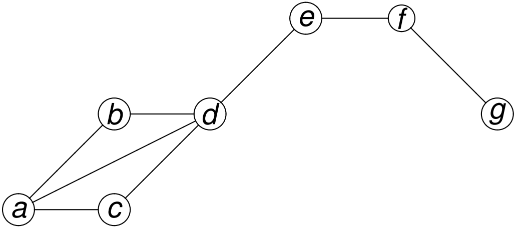
- Le graphe $\mathbf{H} = \langle\{a, b, d\}, \{(a, b), (b, a), (b, d), (d, b)\}$ est un sous-graphe de **G**. H n'est pas un sous graphe induit.
- Le sous-graphe induit sur l'ensemble $\{a, b, d\}$ est $\langle\{a, b, d\}, \{(a, b), (b, a), (b, d), (d, b), (a, d), (d, a)\}\rangle$.

Sous-graphes



- Le graphe $\mathbf{H} = \langle \{a, b, d\}, \{(a, b), (b, a), (b, d), (d, b)\}$ est un sous-graphe de **G**. H n'est pas un sous graphe induit.
- Le sous-graphe induit sur l'ensemble $\{a, b, d\}$ est $\langle \{a, b, d\}, \{(a, b), (b, a), (b, d), (d, b), (a, d), (d, a)\} \rangle$.

Sous-graphes



- Le graphe $\mathbf{H} = \langle \{a, b, d\}, \{(a, b), (b, a), (b, d), (d, b)\}$ est un sous-graphe de **G**. H n'est pas un sous graphe induit.
- Le sous-graphe induit sur l'ensemble $\{a, b, d\}$ est $\langle \{a, b, d\}, \{(a, b), (b, a), (b, d), (d, b), (a, d), (d, a)\}\rangle$.

Homomorphismes

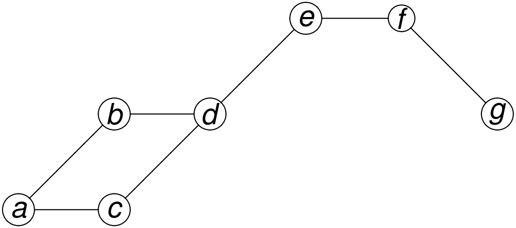
- Un *homomorphisme* entre deux structures **A** et **B** est une fonction $h : A \to B$ préservant les relations :
  - si $R^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots a_n)$ alors $R^{\mathbf{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n))$ pour chaque relation R d'arité n.

Homomorphismes

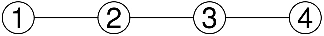
- Un *homomorphisme* entre deux structures **A** et **B** est une fonction $h : A \to B$ préservant les relations :
  - si $R^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots a_n)$ alors $R^{\mathbf{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n))$ pour chaque relation R d'arité n.

Homomorphismes de graphes

La fonction $a \mapsto 1, b \mapsto 2, c \mapsto 2, d \mapsto 3, e \mapsto 4, f \mapsto 3, g \mapsto 4$ est un homomorphisme du graphe suivant



vers le graphe P_4



Logique du premier-ordre

- Une formule de la *logique du premier-ordre* est construite à partir de :
  - *formules atomiques* $x = y$, $R(x_1, \ldots, x_n)$,
  - des *connecteurs* $\neg$ (négation),$\wedge$ (conjonction, “et”),$\vee$ (disjonction, “ou”),
  - des *quantificateurs* $\exists$ (il existe), $\forall$ (pour tout).
- Si $\mathbf{A}$ est une structure et $\bar{a}$ une suite d'éléments de A (on notera $\bar{a} \in A$) on note par $\mathbf{A} \models \varphi(\bar{a})$, le fait que $\mathbf{A}$ satisfait la formule $\varphi(\bar{a})$.

Logique du premier-ordre

- Une formule de la *logique du premier-ordre* est construite à partir de :
  - *formules atomiques* $x = y$, $R(x_1, \ldots, x_n)$,
  - des *connecteurs* $\neg$ (négation),$\wedge$ (conjonction, “et”),$\vee$ (disjonction, “ou”),
  - des *quantificateurs* $\exists$ (il existe), $\forall$ (pour tout).
- Si **A** est une structure et $\bar{a}$ une suite d'éléments de A (on notera $\bar{a} \in A$) on note par $\mathbf{A} \models \varphi(\bar{a})$, le fait que **A** satisfait la formule $\varphi(\bar{a})$.

Propriétés de graphes

- Un graphe est non-orienté si et seulement s'il satisfait $\forall x \forall y (A(x,y) \rightarrow A(y,x))$.
- Un graphe est simple (sans boucle) si et seulement s'il satisfait $\forall x \neg A(x,x)$.
- Un graphe contient un cycle de longueur 3 si et seulement s'il satisfait $\exists x \exists y \exists z A(x,y) \wedge A(y,z) \wedge A(z,x)$.

Propriétés de graphes

- Un graphe est non-orienté si et seulement s'il satisfait $\forall x \forall y (A(x, y) \rightarrow A(y, x))$.
- Un graphe est simple (sans boucle) si et seulement s'il satisfait $\forall x \neg A(x, x)$.
- Un graphe contient un cycle de longueur 3 si et seulement s'il satisfait $\exists x \exists y \exists z A(x, y) \wedge A(y, z) \wedge A(z, x)$.

Propriétés de graphes

- Un graphe est non-orienté si et seulement s'il satisfait $\forall x \forall y (A(x, y) \rightarrow A(y, x))$.
- Un graphe est simple (sans boucle) si et seulement s'il satisfait $\forall x \neg A(x, x)$.
- Un graphe contient un cycle de longueur 3 si et seulement s'il satisfait $\exists x \exists y \exists z A(x, y) \wedge A(y, z) \wedge A(z, x)$.

Variables et modèles

- Dans une formule, une variable (en fait l'occurrence d'une variable) qui est dans la portée d'un quantificateur est dite *liée*, une variable qui n'est pas liée est dite *libre*.
- Une formule dont toutes les variables sont liées, est appelée un *énoncé*.
- Une structure qui satisfait un énoncé est appelée un *modèle* de cet énoncé. On note par $Mod(\varphi)$ et $Mod_{fin}(\varphi)$ l'ensemble des modèles et l'ensemble des modèles finis de l'énoncé φ.

Variables et modèles

- Dans une formule, une variable (en fait l'occurrence d'une variable) qui est dans la portée d'un quantificateur est dite *liée*, une variable qui n'est pas liée est dite *libre*.
- Une formule dont toutes les variables sont liées, est appelée un *énoncé*.
- Une structure qui satisfait un énoncé est appelée un *modèle* de cet énoncé. On note par $Mod(\varphi)$ et $Mod_{fin}(\varphi)$ l'ensemble des modèles et l'ensemble des modèles finis de l'énoncé φ.

Variables et modèles

- Dans une formule, une variable (en fait l'occurrence d'une variable) qui est dans la portée d'un quantificateur est dite *liée*, une variable qui n'est pas liée est dite *libre*.
- Une formule dont toutes les variables sont liées, est appelée un *énoncé*.
- Une structure qui satisfait un énoncé est appelée un *modèle* de cet énoncé. On note par $Mod(\varphi)$ et $Mod_{fin}(\varphi)$ l'ensemble des modèles et l'ensemble des modèles finis de l'énoncé φ.

Variables et modèles

- Dans une formule, une variable (en fait l'occurrence d'une variable) qui est dans la portée d'un quantificateur est dite *liée*, une variable qui n'est pas liée est dite *libre*.
- Une formule dont toutes les variables sont liées, est appelée un *énoncé*.
- Une structure qui satisfait un énoncé est appelée un *modèle* de cet énoncé. On note par $Mod(\varphi)$ et $Mod_{fin}(\varphi)$ l'ensemble des modèles et l'ensemble des modèles finis de l'énoncé φ.

Exemples de variables libres et liées

- Dans $\exists y A(x, y)$, x est libre et y liée.
- Dans $\forall x \exists y A(x, y)$, x et y sont liée. Il s'agit donc d'un énoncé.
- Les modèles de $\forall x \exists y A(x, y)$ sont les graphes sans sommet isolé.

Exemples de variables libres et liées

- Dans $\exists y A(x, y)$, x est libre et y liée.
- Dans $\forall x \exists y A(x, y)$, x et y sont liée. Il s'agit donc d'un énoncé.
- Les modèles de $\forall x \exists y A(x, y)$ sont les graphes sans sommet isolé.

Exemples de variables libres et liées

- Dans $\exists y A(x, y)$, x est libre et y liée.
- Dans $\forall x \exists y A(x, y)$, x et y sont liée. Il s'agit donc d'un énoncé.
- Les modèles de $\forall x \exists y A(x, y)$ sont les graphes sans sommet isolé.

Quantificateurs

- Le nombre de quantificateurs d'une formule est le *nombre total* des quantificateurs $\exists$ et $\forall$ qui apparaissent dans cette formule.
- Le rang de quantification d'une formule est le nombre maximal *d'imbrications* de quantificateurs dans cette formule.

Quantificateurs

- Le nombre de quantificateurs d'une formule est le *nombre total* des quantificateurs $\exists$ et $\forall$ qui apparaissent dans cette formule.
- Le rang de quantification d'une formule est le nombre maximal *d'imbrications* de quantificateurs dans cette formule.

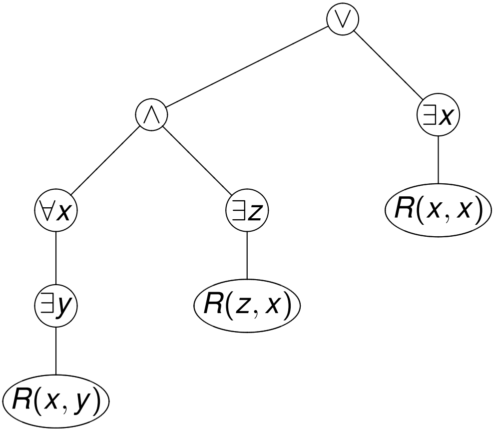
Nombre et rang de quantification

$$(\forall x(\exists y R(x,y)) \wedge (\exists z R(z,x))) \vee (\exists x R(x,x))$$

- Nombre de quantificateurs $qcount = 4$.
- Rang de quantification $qrank = 2$.
- La taille d'une formule est la taille de son arbre syntaxique (nombre de connecteurs + nombre de relations atomiques).

Nombre et rang de quantification

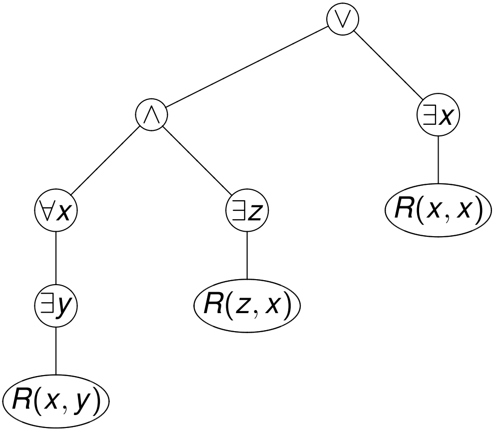
$$(\forall x(\exists y R(x,y)) \wedge (\exists z R(z,x))) \vee (\exists x R(x,x))$$



- Nombre de quantificateurs $qcount = 4$.
- Rang de quantification $qrank = 2$.
- La taille d'une formule est la taille de son arbre syntaxique (nombre de connecteurs + nombre de relations atomiques).

Nombre et rang de quantification

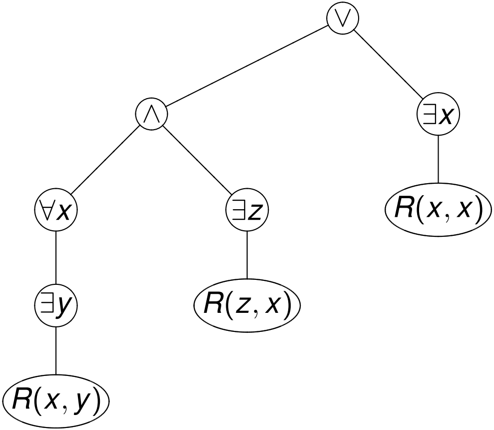
$$(\forall x(\exists y R(x,y)) \wedge (\exists z R(z,x))) \vee (\exists x R(x,x))$$



- Nombre de quantificateurs $qcount = 4$.
- Rang de quantification $qrank = 2$.
- La taille d'une formule est la taille de son arbre syntaxique (nombre de connecteurs + nombre de relations atomiques).

Nombre et rang de quantification

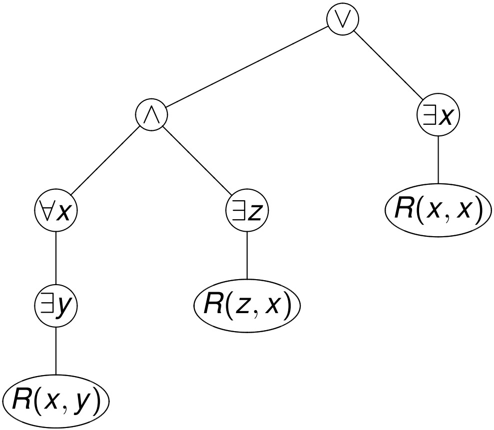
$$(\forall x(\exists y R(x,y)) \wedge (\exists z R(z,x))) \vee (\exists x R(x,x))$$



- Nombre de quantificateurs *qcount* $= 4$.
- Rang de quantification *qrank* $= 2$.
- La taille d'une formule est la taille de son arbre syntaxique (nombre de connecteurs + nombre de relations atomiques).

Nombre et rang de quantification

$$(\forall x(\exists y R(x,y)) \wedge (\exists z R(z,x))) \vee (\exists x R(x,x))$$



- Nombre de quantificateurs *qcount* $= 4$.
- Rang de quantification *qrank* $= 2$.
- La taille d'une formule est la taille de son arbre syntaxique (nombre de connecteurs + nombre de relations atomiques).

Équivalence logique

- Deux formules avec les mêmes variables libres $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ et $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ sont *logiquement équivalentes (dans le fini)* si pour toute structure (finie) **A** et $\bar{a} \in A$, $\mathbf{A} \models \varphi(\bar{a})$ si et seulement si $\mathbf{A} \models \psi(\bar{a})$.
  - Deux formules peuvent être équivalentes dans le fini sans l'être en général.
    - Par exemple l'énoncé sur une relation binaire qui définit un ordre total sans extrémité est équivalent au faux $(\exists x \neg(x = x))$dans le fini.

UQÀM
Université du Québec à Montréal

Équivalence logique

- Deux formules avec les mêmes variables libres $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ et $\psi(x_1, \dots, x_n)$ sont *logiquement équivalentes (dans le fini)* si pour toute structure (finie) **A** et $\bar{a} \in A$, $\mathbf{A} \models \varphi(\bar{a})$ si et seulement si $\mathbf{A} \models \psi(\bar{a})$.
    - Deux formules peuvent être équivalentes dans le fini sans l'être en général.
        - Par exemple l'énoncé sur une relation binaire qui définit un ordre total sans extrémité est équivalent au faux $(\exists x \neg(x = x))$dans le fini.

Équivalence logique

- Deux formules avec les mêmes variables libres $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ et $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ sont *logiquement équivalentes (dans le fini)* si pour toute structure (finie) **A** et $\bar{a} \in A$, $\mathbf{A} \models \varphi(\bar{a})$ si et seulement si $\mathbf{A} \models \psi(\bar{a})$.
  - Deux formules peuvent être équivalentes dans le fini sans l'être en général.
    - Par exemple l'énoncé sur une relation binaire qui définit un ordre total sans extrémité est équivalent au faux $(\exists x \neg(x = x))$dans le fini.

UQÀM
Université du Québec à Montréal

Préservation

- Une formule $\varphi(\bar{x})$ est *préservée* par homomorphismes (dans le fini) si pour tout homomorphisme entre structures (finies) $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ et $\bar{a} \in A$ tels que $\mathbf{A} \models \varphi(\bar{a})$, on a que $\mathbf{B} \models \psi(h(\bar{a}))$.
  - Par la définition même d'homomorphisme les formules atomiques sont préservées par homomorphismes.

Préservation

- Une formule $\varphi(\bar{x})$ est *préservée* par homomorphismes (dans le fini) si pour tout homomorphisme entre structures (finies) $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ et $\bar{a} \in A$ tels que $\mathbf{A} \models \varphi(\bar{a})$, on a que $\mathbf{B} \models \psi(h(\bar{a}))$.
  - Par la définition même d'homomorphisme les formules atomiques sont préservées par homomorphismes.

Classes syntaxiques de formules

- Une formule est dite *existentielle* si tous ses quantificateurs existentiels (universels) sont sous un nombre pair (impair) de négations.
    - Si on pousse toutes les négations jusqu'au formules atomiques, il ne restera plus que des quantificateurs existentiels.
- Une formule est dite *positive* si elle ne contient aucune négation (seulement des $\wedge$, $\vee$, $\exists$, $\forall$).
- Une formule est dite *primitive-positive* si elle est construite à partir des formules atomiques en n'utilisant que des $\wedge$ et des $\exists$.
- Une formule est dite *existentielle-positive* si elle est construite à partir des formules atomiques en n'utilisant que des $\vee$, $\wedge$ et des $\exists$.

Classes syntaxiques de formules

- Une formule est dite *existentielle* si tous ses quantificateurs existentiels (universels) sont sous un nombre pair (impair) de négations.
  - Si on pousse toutes les négations jusqu'au formules atomiques, il ne restera plus que des quantificateurs existentiels.
- Une formule est dite *positive* si elle ne contient aucune négation (seulement des $\wedge$, $\vee$, $\exists$, $\forall$).
- Une formule est dite *primitive-positive* si elle est construite à partir des formules atomiques en n'utilisant que des $\wedge$ et des $\exists$.
- Une formule est dite *existentielle-positive* si elle est construite à partir des formules atomiques en n'utilisant que des $\vee$, $\wedge$ et des $\exists$.

Classes syntaxiques de formules

- Une formule est dite *existentielle* si tous ses quantificateurs existentiels (universels) sont sous un nombre pair (impair) de négations.
  - Si on pousse toutes les négations jusqu'au formules atomiques, il ne restera plus que des quantificateurs existentiels.
- Une formule est dite *positive* si elle ne contient aucune négation (seulement des $\wedge$, $\vee$, $\exists$, $\forall$).
- Une formule est dite *primitive-positive* si elle est construite à partir des formules atomiques en n'utilisant que des $\wedge$ et des $\exists$.
- Une formule est dite *existentielle-positive* si elle est construite à partir des formules atomiques en n'utilisant que des $\vee$, $\wedge$ et des $\exists$.

Classes syntaxiques de formules

- Une formule est dite *existentielle* si tous ses quantificateurs existentiels (universels) sont sous un nombre pair (impair) de négations.
  - Si on pousse toutes les négations jusqu'au formules atomiques, il ne restera plus que des quantificateurs existentiels.
- Une formule est dite *positive* si elle ne contient aucune négation (seulement des $\wedge$, $\vee$, $\exists$, $\forall$).
- Une formule est dite *primitive-positive* si elle est construite à partir des formules atomiques en n'utilisant que des $\wedge$ et des $\exists$.
- Une formule est dite *existentielle-positive* si elle est construite à partir des formules atomiques en n'utilisant que des $\vee$, $\wedge$ et des $\exists$.

Classes syntaxiques de formules

- Une formule est dite *existentielle* si tous ses quantificateurs existentiels (universels) sont sous un nombre pair (impair) de négations.
  - Si on pousse toutes les négations jusqu'au formules atomiques, il ne restera plus que des quantificateurs existentiels.
- Une formule est dite *positive* si elle ne contient aucune négation (seulement des $\wedge$, $\vee$, $\exists$, $\forall$).
- Une formule est dite *primitive-positive* si elle est construite à partir des formules atomiques en n'utilisant que des $\wedge$ et des $\exists$.
- Une formule est dite *existentielle-positive* si elle est construite à partir des formules atomiques en n'utilisant que des $\vee$, $\wedge$ et des $\exists$.

UQÀM
Université du Québec à Montréal

Classes syntaxiques de formules

- Une formule est dite *existentielle* si tous ses quantificateurs existentiels (universels) sont sous un nombre pair (impair) de négations.
  - Si on pousse toutes les négations jusqu'au formules atomiques, il ne restera plus que des quantificateurs existentiels.
- Une formule est dite *positive* si elle ne contient aucune négation (seulement des $\wedge$, $\vee$, $\exists$, $\forall$).
- Une formule est dite *primitive-positive* si elle est construite à partir des formules atomiques en n'utilisant que des $\wedge$ et des $\exists$.
- Une formule est dite *existentielle-positive* si elle est construite à partir des formules atomiques en n'utilisant que des $\vee$, $\wedge$ et des $\exists$.

Théorème de préservation

Théorème (de préservation par homomorphismes)

Une formule est préservée par homomorphismes si et seulement si elle est équivalente à une formule existentielle-positive (dans l'infini Lyndon (1959)/dans le fini B. Rossman (2005))

(<=) Une formule existentielle-positive est préservée par homomorphismes

Démonstration par induction sur la structure de la formule.

- Une formule atomique est préservée par homomorphismes par définition de la notion d'homomorphisme.
- Si deux formules $\varphi(\bar{x})$, $\psi(\bar{x})$ sont préservées par homomorphismes, leur disjonction $\varphi \vee \psi(\bar{x})$ l'est aussi.
  - Si $\mathbf{A} \models \varphi \vee \psi(\bar{a})$, on a que soit $\mathbf{A} \models \varphi(\bar{a})$, soit que $\mathbf{A} \models \psi(\bar{a})$. Si on a un homomorphisme $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, comme φ et ψ sont préservées par homomorphismes, il s'en suit qu'on a donc soit $\mathbf{B} \models \varphi(h(\bar{a}))$, soit $\mathbf{B} \models \psi(h(\bar{a}))$. On a donc bien que $\mathbf{B} \models \varphi \vee \psi(h(\bar{a}))$.
- Le cas de la conjonction est similaire.
- Pour le quantificateur existentiel : Si $\mathbf{A} \models \exists x \varphi(x, \bar{a})$, on a qu'il existe un $a \in A$ tel que $\mathbf{A} \models \varphi(a, \bar{a})$. Si on a un homomorphisme $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, comme φ est préservée par homomorphismes, il s'en suit qu'on a $\mathbf{B} \models \varphi(h(a), h(\bar{a}))$. On a donc bien que $\mathbf{B} \models \exists x \varphi(x, h(\bar{a}))$.

(<=) Une formule existentielle-positive est préservée par homomorphismes

Démonstration par induction sur la structure de la formule.

- Une formule atomique est préservée par homomorphismes par définition de la notion d'homomorphisme.
- Si deux formules $\varphi(\bar{x})$, $\psi(\bar{x})$ sont préservées par homomorphismes, leur disjonction $\varphi \vee \psi(\bar{x})$ l'est aussi.
  - Si $\mathbf{A} \models \varphi \vee \psi(\bar{a})$, on a que soit $\mathbf{A} \models \varphi(\bar{a})$, soit que $\mathbf{A} \models \psi(\bar{a})$. Si on a un homomorphisme $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, comme φ et ψ sont préservées par homomorphismes, il s'en suit qu'on a donc soit $\mathbf{B} \models \varphi(h(\bar{a}))$, soit $\mathbf{B} \models \psi(h(\bar{a}))$. On a donc bien que $\mathbf{B} \models \varphi \vee \psi(h(\bar{a}))$.
- Le cas de la conjonction est similaire.
- Pour le quantificateur existentiel : Si $\mathbf{A} \models \exists x \varphi(x, \bar{a})$, on a qu'il existe un $a \in A$ tel que $\mathbf{A} \models \varphi(a, \bar{a})$. Si on a un homomorphisme $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, comme φ est préservée par homomorphismes, il s'en suit qu'on a $\mathbf{B} \models \varphi(h(a), h(\bar{a}))$. On a donc bien que $\mathbf{B} \models \exists x \varphi(x, h(\bar{a}))$.

UQÀM Université du Québec à Montréal

(<=) Une formule existentielle-positive est préservée par homomorphismes

Démonstration par induction sur la structure de la formule.

- Une formule atomique est préservée par homomorphismes par définition de la notion d'homomorphisme.
- Si deux formules $\varphi(\bar{x})$, $\psi(\bar{x})$ sont préservées par homomorphismes, leur disjonction $\varphi \vee \psi(\bar{x})$ l'est aussi.
  - Si $\mathbf{A} \models \varphi \vee \psi(\bar{a})$, on a que soit $\mathbf{A} \models \varphi(\bar{a})$, soit que $\mathbf{A} \models \psi(\bar{a})$. Si on a un homomorphisme $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, comme φ et ψ sont préservées par homomorphismes, il s'en suit qu'on a donc soit $\mathbf{B} \models \varphi(h(\bar{a}))$, soit $\mathbf{B} \models \psi(h(\bar{a}))$. On a donc bien que $\mathbf{B} \models \varphi \vee \psi(h(\bar{a}))$.
- Le cas de la conjonction est similaire.
- Pour le quantificateur existentiel : Si $\mathbf{A} \models \exists x \varphi(x, \bar{a})$, on a qu'il existe un $a \in A$ tel que $\mathbf{A} \models \varphi(a, \bar{a})$. Si on a un homomorphisme $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, comme φ est préservée par homomorphismes, il s'en suit qu'on a $\mathbf{B} \models \varphi(h(a), h(\bar{a}))$. On a donc bien que $\mathbf{B} \models \exists x \varphi(x, h(\bar{a}))$.

(<=) Une formule existentielle-positive est préservée par homomorphismes

Démonstration par induction sur la structure de la formule.

- Une formule atomique est préservée par homomorphismes par définition de la notion d'homomorphisme.
- Si deux formules $\varphi(\bar{x})$, $\psi(\bar{x})$ sont préservées par homomorphismes, leur disjonction $\varphi \vee \psi(\bar{x})$ l'est aussi.
  - Si $\mathbf{A} \models \varphi \vee \psi(\bar{a})$, on a que soit $\mathbf{A} \models \varphi(\bar{a})$, soit que $\mathbf{A} \models \psi(\bar{a})$. Si on a un homomorphisme $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, comme φ et ψ sont préservées par homomorphismes, il s'en suit qu'on a donc soit $\mathbf{B} \models \varphi(h(\bar{a}))$, soit $\mathbf{B} \models \psi(h(\bar{a}))$. On a donc bien que $\mathbf{B} \models \varphi \vee \psi(h(\bar{a}))$.
- Le cas de la conjonction est similaire.
- Pour le quantificateur existentiel : Si $\mathbf{A} \models \exists x \varphi(x, \bar{a})$, on a qu'il existe un $a \in A$ tel que $\mathbf{A} \models \varphi(a, \bar{a})$. Si on a un homomorphisme $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, comme φ est préservée par homomorphismes, il s'en suit qu'on a $\mathbf{B} \models \varphi(h(a), h(\bar{a}))$. On a donc bien que $\mathbf{B} \models \exists x \varphi(x, h(\bar{a}))$.

(<=) Une formule existentielle-positive est préservée par homomorphismes

Démonstration par induction sur la structure de la formule.

- Une formule atomique est préservée par homomorphismes par définition de la notion d'homomorphisme.
- Si deux formules $\varphi(\bar{x})$, $\psi(\bar{x})$ sont préservées par homomorphismes, leur disjonction $\varphi \vee \psi(\bar{x})$ l'est aussi.
  - Si $\mathbf{A} \models \varphi \vee \psi(\bar{a})$, on a que soit $\mathbf{A} \models \varphi(\bar{a})$, soit que $\mathbf{A} \models \psi(\bar{a})$. Si on a un homomorphisme $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, comme φ et ψ sont préservées par homomorphismes, il s'en suit qu'on a donc soit $\mathbf{B} \models \varphi(h(\bar{a}))$, soit $\mathbf{B} \models \psi(h(\bar{a}))$. On a donc bien que $\mathbf{B} \models \varphi \vee \psi(h(\bar{a}))$.
- Le cas de la conjonction est similaire.
- Pour le quantificateur existentiel : Si $\mathbf{A} \models \exists x \varphi(x, \bar{a})$, on a qu'il existe un $a \in A$ tel que $\mathbf{A} \models \varphi(a, \bar{a})$. Si on a un homomorphisme $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, comme φ est préservée par homomorphismes, il s'en suit qu'on a $\mathbf{B} \models \varphi(h(a), h(\bar{a}))$. On a donc bien que $\mathbf{B} \models \exists x \varphi(x, h(\bar{a}))$.

UQÀM Université du Québec à Montréal

(<=) Une formule existentielle-positive est préservée par homomorphismes

Démonstration par induction sur la structure de la formule.

- Une formule atomique est préservée par homomorphismes par définition de la notion d'homomorphisme.
- Si deux formules $\varphi(\bar{x})$, $\psi(\bar{x})$ sont préservées par homomorphismes, leur disjonction $\varphi \vee \psi(\bar{x})$ l'est aussi.
  - Si $\mathbf{A} \models \varphi \vee \psi(\bar{a})$, on a que soit $\mathbf{A} \models \varphi(\bar{a})$, soit que $\mathbf{A} \models \psi(\bar{a})$. Si on a un homomorphisme $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, comme φ et ψ sont préservées par homomorphismes, il s'en suit qu'on a donc soit $\mathbf{B} \models \varphi(h(\bar{a}))$, soit $\mathbf{B} \models \psi(h(\bar{a}))$. On a donc bien que $\mathbf{B} \models \varphi \vee \psi(h(\bar{a}))$.
- Le cas de la conjonction est similaire.
- Pour le quantificateur existentiel : Si $\mathbf{A} \models \exists x \varphi(x, \bar{a})$, on a qu'il existe un $a \in A$ tel que $\mathbf{A} \models \varphi(a, \bar{a})$. Si on a un homomorphisme $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, comme φ est préservée par homomorphismes, il s'en suit qu'on a $\mathbf{B} \models \varphi(h(a), h(\bar{a}))$. On a donc bien que $\mathbf{B} \models \exists x \varphi(x, h(\bar{a}))$.

(<=) Une formule existentielle-positive est préservée par homomorphismes

Démonstration par induction sur la structure de la formule.

- Une formule atomique est préservée par homomorphismes par définition de la notion d'homomorphisme.
- Si deux formules $\varphi(\bar{x})$, $\psi(\bar{x})$ sont préservées par homomorphismes, leur disjonction $\varphi \vee \psi(\bar{x})$ l'est aussi.
  - Si $\mathbf{A} \models \varphi \vee \psi(\bar{a})$, on a que soit $\mathbf{A} \models \varphi(\bar{a})$, soit que $\mathbf{A} \models \psi(\bar{a})$. Si on a un homomorphisme $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, comme φ et ψ sont préservées par homomorphismes, il s'en suit qu'on a donc soit $\mathbf{B} \models \varphi(h(\bar{a}))$, soit $\mathbf{B} \models \psi(h(\bar{a}))$. On a donc bien que $\mathbf{B} \models \varphi \vee \psi(h(\bar{a}))$.
- Le cas de la conjonction est similaire.
- Pour le quantificateur existentiel : Si $\mathbf{A} \models \exists x \varphi(x, \bar{a})$, on a qu'il existe un $a \in A$ tel que $\mathbf{A} \models \varphi(a, \bar{a})$. Si on a un homomorphisme $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, comme φ est préservée par homomorphismes, il s'en suit qu'on a $\mathbf{B} \models \varphi(h(a), h(\bar{a}))$. On a donc bien que $\mathbf{B} \models \exists x \varphi(x, h(\bar{a}))$.

Forme normale

Théorème (Lemma 2.12)

Une formule existentielle-positive est logiquement équivalente à un disjonction finie de formules primitives-positives de nombre et rang de quantification inférieure ou égal à la formule originale.

Démonstration [Lemma 2.12]

Idée : On ramène toutes les disjonctions au niveau supérieur.

- Les conjonctions peuvent être poussées sous les disjonctions par l'équivalence $\varphi \wedge (\psi_1 \vee \psi_2) = (\varphi \wedge \psi_1) \vee (\varphi \wedge \psi_2)$.
- Les quantificateurs existentiels peuvent être poussés sous les disjonctions par l'équivalence $\exists x(\psi_1 \vee \psi_2) = (\exists x \psi_1) \vee (\exists x \psi_2)$.
- Dans les deux cas, le nombre et le nombre d'imbrications des quantificateurs ne sont pas augmentés en passant de la formule à gauche à l'un ou l'autre des deux membres de la disjonction de droite.

Démonstration [Lemma 2.12]

Idée : On ramène toutes les disjonctions au niveau supérieur.

- Les conjonctions peuvent être poussées sous les disjonctions par l'équivalence $\varphi \wedge (\psi_1 \vee \psi_2) = (\varphi \wedge \psi_1) \vee (\varphi \wedge \psi_2)$.
- Les quantificateurs existentiels peuvent être poussés sous les disjonctions par l'équivalence $\exists x(\psi_1 \vee \psi_2) = (\exists x \psi_1) \vee (\exists x \psi_2)$.
- Dans les deux cas, le nombre et le nombre d'imbrications des quantificateurs ne sont pas augmentés en passant de la formule à gauche à l'un ou l'autre des deux membres de la disjonction de droite.

Démonstration [Lemma 2.12]

Idée : On ramène toutes les disjonctions au niveau supérieur.

- Les conjonctions peuvent être poussées sous les disjonctions par l'équivalence $\varphi \wedge (\psi_1 \vee \psi_2) = (\varphi \wedge \psi_1) \vee (\varphi \wedge \psi_2)$.
- Les quantificateurs existentiels peuvent être poussés sous les disjonctions par l'équivalence $\exists x(\psi_1 \vee \psi_2) = (\exists x \psi_1) \vee (\exists x \psi_2)$.
- Dans les deux cas, le nombre et le nombre d'imbrications des quantificateurs ne sont pas augmentés en passant de la formule à gauche à l'un ou l'autre des deux membres de la disjonction de droite.

Démonstration [Lemma 2.12]

Idée : On ramène toutes les disjonctions au niveau supérieur.

- Les conjonctions peuvent être poussées sous les disjonctions par l'équivalence $\varphi \wedge (\psi_1 \vee \psi_2) = (\varphi \wedge \psi_1) \vee (\varphi \wedge \psi_2)$.
- Les quantificateurs existentiels peuvent être poussés sous les disjonctions par l'équivalence $\exists x(\psi_1 \vee \psi_2) = (\exists x \psi_1) \vee (\exists x \psi_2)$.
- Dans les deux cas, le nombre et le nombre d'imbrications des quantificateurs ne sont pas augmentés en passant de la formule à gauche à l'un ou l'autre des deux membres de la disjonction de droite.