Homomorphism Preservation Theorems de B. Rossman

2. Préliminaires (2/3)

Roger Villemaire

Département d'informatique
UQAM

Groupe de Travail HPT
13 février 2009

Plan

Structures au dessus d'un ensemble

- Une *structure au dessus d'un ensemble* X est tout simplement une structure $\mathbf{A}$, telle que $X \subseteq A$.
- Un *homomorphisme de* $\mathbf{A}$ *à* $\mathbf{B}$ *au dessus de* X (pour $\mathbf{A}$ à $\mathbf{B}$ des structures au dessus de X) est un homomorphisme $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ qui fixe les éléments de X ($h(x) = x$ pour $x \in X$). On note par $\mathbf{A} \to_X \mathbf{B}$ l'existence d'un tel homomorphisme.
- Les structures $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont dites *homomorphiquement équivalentes au dessus de* X (noté $\mathbf{A} \rightleftarrows_X \mathbf{B}$ si $\mathbf{A} \to_X \mathbf{B}$ et $\mathbf{B} \to_X \mathbf{A}$).
- Les structures $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont dites *isomorphes au dessus de* X (noté $\mathbf{A} \cong_X \mathbf{B}$) s'il existe un isomorphisme de $\mathbf{A}$ à $\mathbf{B}$ fixant X.

Structures au dessus d'un ensemble

- Une *structure au dessus d'un ensemble* X est tout simplement une structure **A**, telle que $X \subseteq A$.
- Un *homomorphisme de* **A** *à* **B** *au dessus de* X (pour **A** à **B** des structures au dessus de X) est un homomorphisme $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ qui fixe les éléments de X ($h(x) = x$ pour $x \in X$). On note par $\mathbf{A} \to_X \mathbf{B}$ l'existence d'un tel homomorphisme.
- Les structures **A** et **B** sont dites *homomorphiquement équivalentes au dessus de* X (noté $\mathbf{A} \rightleftarrows_X \mathbf{B}$ si $\mathbf{A} \to_X \mathbf{B}$ et $\mathbf{B} \to_X \mathbf{A}$).
- Les structures **A** et **B** sont dites *isomorphes au dessus de* X (noté $\mathbf{A} \cong_X \mathbf{B}$) s'il existe un isomorphisme de **A** à **B** fixant X.

Structures au dessus d'un ensemble

- Une *structure au dessus d'un ensemble* X est tout simplement une structure $\mathbf{A}$, telle que $X \subseteq A$.
- Un *homomorphisme de* $\mathbf{A}$ *à* $\mathbf{B}$ *au dessus de* X (pour $\mathbf{A}$ à $\mathbf{B}$ des structures au dessus de X) est un homomorphisme $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ qui fixe les éléments de X ($h(x) = x$ pour $x \in X$). On note par $\mathbf{A} \to_X \mathbf{B}$ l'existence d'un tel homomorphisme.
- Les structures $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont dites *homomorphiquement équivalentes au dessus de* X (noté $\mathbf{A} \rightleftarrows_X \mathbf{B}$ si $\mathbf{A} \to_X \mathbf{B}$ et $\mathbf{B} \to_X \mathbf{A}$).
- Les structures $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont dites *isomorphes au dessus de* X (noté $\mathbf{A} \cong_X \mathbf{B}$) s'il existe un isomorphisme de $\mathbf{A}$ à $\mathbf{B}$ fixant X.

Structures au dessus d'un ensemble

- Une *structure au dessus d'un ensemble* X est tout simplement une structure **A**, telle que $X \subseteq A$.
- Un *homomorphisme de* **A** *à* **B** *au dessus de* X (pour **A** à **B** des structures au dessus de X) est un homomorphisme $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ qui fixe les éléments de X ($h(x) = x$ pour $x \in X$). On note par $\mathbf{A} \to_X \mathbf{B}$ l'existence d'un tel homomorphisme.
- Les structures **A** et **B** sont dites *homomorphiquement équivalentes au dessus de* X (noté $\mathbf{A} \rightleftarrows_X \mathbf{B}$ si $\mathbf{A} \to_X \mathbf{B}$ et $\mathbf{B} \to_X \mathbf{A}$).
- Les structures **A** et **B** sont dites *isomorphes au dessus de* X (noté $\mathbf{A} \cong_X \mathbf{B}$) s'il existe un isomorphisme de **A** à **B** fixant X.

Structures au dessus d'un ensemble

- Une *structure au dessus d'un ensemble* X est tout simplement une structure $\mathbf{A}$, telle que $X \subseteq A$.
- Un *homomorphisme de* $\mathbf{A}$ *à* $\mathbf{B}$ *au dessus de* X (pour $\mathbf{A}$ à $\mathbf{B}$ des structures au dessus de X) est un homomorphisme $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ qui fixe les éléments de X ($h(x) = x$ pour $x \in X$). On note par $\mathbf{A} \to_X \mathbf{B}$ l'existence d'un tel homomorphisme.
- Les structures $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont dites *homomorphiquement équivalentes au dessus de* X (noté $\mathbf{A} \rightleftarrows_X \mathbf{B}$ si $\mathbf{A} \to_X \mathbf{B}$ et $\mathbf{B} \to_X \mathbf{A}$).
- Les structures $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont dites *isomorphes au dessus de* X (noté $\mathbf{A} \cong_X \mathbf{B}$) s'il existe un isomorphisme de $\mathbf{A}$ à $\mathbf{B}$ fixant X.

Union disjointe au dessus d'un ensemble

- *L'union disjointe de deux structures* **A** *et* **B** *au dessus de* X (notée $\mathbf{A} \oplus_X \mathbf{B}$) est formée de :
  - Un univers qui contient les éléments de A et B où les éléments de X ont été identifiés (une seule copie).
  - Les relations héritées de **A** et **B**.
- C'est en fait le *co-produit* dans la catégorie des structures au dessus de X.

Union disjointe au dessus d'un ensemble

- *L'union disjointe de deux structures* **A** *et* **B** *au dessus de* X (notée $\mathbf{A} \oplus_X \mathbf{B}$) est formée de :
  - Un univers qui contient les éléments de A et B où les éléments de X ont été identifiés (une seule copie).
  - Les relations héritées de **A** et **B**.
- C'est en fait le *co-produit* dans la catégorie des structures au dessus de X.

Union disjointe au dessus d'un ensemble

- *L'union disjointe de deux structures* **A** *et* **B** *au dessus de* X (notée **A** $\oplus_X$ **B**) est formée de :
  - Un univers qui contient les éléments de A et B où les éléments de X ont été identifiés (une seule copie).
  - Les relations héritées de **A** et **B**.
- C'est en fait le *co-produit* dans la catégorie des structures au dessus de X.

Union disjointe au dessus d'un ensemble

- *L'union disjointe de deux structures* **A** *et* **B** *au dessus de* X (notée $\mathbf{A} \oplus_X \mathbf{B}$) est formée de :
  - Un univers qui contient les éléments de A et B où les éléments de X ont été identifiés (une seule copie).
  - Les relations héritées de **A** et **B**.
- C'est en fait le *co-produit* dans la catégorie des structures au dessus de X.

Produit direct au dessus d'un ensemble

- *Le produit direct de deux structures* **A** *et* **B** *au dessus de* X (noté $\mathbf{A} \otimes_X \mathbf{B}$) est formé de :
  - Un univers qui contient les *couples* (a, b) tels que $a \in A$ et $b \in B$.
  - La *diagonale* $\Delta_X = \{(x, x); x \in X\}$ étant identifiée avec X (c'est donc une structure au dessus de X).
  - $R^{\mathbf{A} \otimes_X \mathbf{B}} = \{((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)); (a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathbf{A}} \text{ et } (b_1, \ldots, b_n) \in R^{\mathbf{B}}\}$.
- C'est en fait le *produit* dans la catégorie des structures au dessus de X.

Produit direct au dessus d'un ensemble

- *Le produit direct de deux structures* **A** *et* **B** *au dessus de* X (noté $\mathbf{A} \otimes_X \mathbf{B}$) est formé de :
  - Un univers qui contient les *couples* (a, b) tels que $a \in A$ et $b \in B$.
  - La *diagonale* $\Delta_X = \{(x, x); x \in X\}$ étant identifiée avec X (c'est donc une structure au dessus de X).
  - $R^{\mathbf{A}\otimes_X\mathbf{B}} = \{((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)); (a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathbf{A}} \text{ et } (b_1, \ldots, b_n) \in R^{\mathbf{B}}\}$.
- C'est en fait le *produit* dans la catégorie des structures au dessus de X.

Produit direct au dessus d'un ensemble

- *Le produit direct de deux structures* **A** *et* **B** *au dessus de X* (noté $\mathbf{A} \otimes_X \mathbf{B}$) est formé de :
  - Un univers qui contient les *couples* (a, b) tels que $a \in A$ et $b \in B$.
  - La *diagonale* $\Delta_X = \{(x, x); x \in X\}$ étant identifiée avec X (c'est donc une structure au dessus de X).
  - $R^{\mathbf{A} \otimes_X \mathbf{B}} = \{((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)); (a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathbf{A}} \text{ et } (b_1, \ldots, b_n) \in R^{\mathbf{B}}\}$.
- C'est en fait le *produit* dans la catégorie des structures au dessus de X.

Produit direct au dessus d'un ensemble

- *Le produit direct de deux structures* **A** *et* **B** *au dessus de* X (noté $\mathbf{A} \otimes_X \mathbf{B}$) est formé de :
  - Un univers qui contient les *couples* (a, b) tels que $a \in A$ et $b \in B$.
  - La *diagonale* $\Delta_X = \{(x, x); x \in X\}$ étant identifiée avec X (c'est donc une structure au dessus de X).
  - $R^{\mathbf{A} \otimes_X \mathbf{B}} = \{((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)); (a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathbf{A}} \text{ et } (b_1, \ldots, b_n) \in R^{\mathbf{B}}\}$.
- C'est en fait le *produit* dans la catégorie des structures au dessus de X.

Produit direct au dessus d'un ensemble

- *Le produit direct de deux structures* **A** *et* **B** *au dessus de* X (noté $\mathbf{A} \otimes_X \mathbf{B}$) est formé de :
  - Un univers qui contient les *couples* (a, b) tels que $a \in A$ et $b \in B$.
  - La *diagonale* $\Delta_X = \{(x, x); x \in X\}$ étant identifiée avec X (c'est donc une structure au dessus de X).
  - $R^{\mathbf{A} \otimes_X \mathbf{B}} = \{((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)); (a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathbf{A}} \text{ et } (b_1, \ldots, b_n) \in R^{\mathbf{B}}\}$.
- C'est en fait le *produit* dans la catégorie des structures au dessus de X.

Lemme 2.4

Soient **A** et **B** des structures au dessus de X et $W \subseteq X$.

- Si $\mathbf{A} \to_X \mathbf{B}$ alors $\mathbf{A} \to_W \mathbf{B}$.
  - Un homomorphisme qui fixe X, fixe aussi W.
- $(\mathbf{A} \oplus_W \mathbf{B}) \to_W (\mathbf{A} \oplus_X \mathbf{B})$.
  - $a \mapsto a$, $b \mapsto b$ est bien défini, fixe W et est un homomorphisme.

Lemme 2.4

Soient **A** et **B** des structures au dessus de X et $W \subseteq X$.

- Si $\mathbf{A} \rightarrow_X \mathbf{B}$ alors $\mathbf{A} \rightarrow_W \mathbf{B}$.
  - Un homomorphisme qui fixe X, fixe aussi W.
- $(\mathbf{A} \oplus_W \mathbf{B}) \rightarrow_W (\mathbf{A} \oplus_X \mathbf{B})$.
  - $a \mapsto a$, $b \mapsto b$ est bien défini, fixe W et est un homomorphisme.

Lemme 2.4

Soient **A** et **B** des structures au dessus de X et $W \subseteq X$.

- Si $\mathbf{A} \rightarrow_X \mathbf{B}$ alors $\mathbf{A} \rightarrow_W \mathbf{B}$.
    - Un homomorphisme qui fixe X, fixe aussi W.
- $(\mathbf{A} \oplus_W \mathbf{B}) \rightarrow_W (\mathbf{A} \oplus_X \mathbf{B})$.
    - $a \mapsto a$, $b \mapsto b$ est bien défini, fixe W et est un homomorphisme.

Lemme 2.4

Soient **A** et **B** des structures au dessus de X et $W \subseteq X$.

- Si $\mathbf{A} \rightarrow_X \mathbf{B}$ alors $\mathbf{A} \rightarrow_W \mathbf{B}$.
  - Un homomorphisme qui fixe X, fixe aussi W.
- $(\mathbf{A} \oplus_W \mathbf{B}) \rightarrow_W (\mathbf{A} \oplus_X \mathbf{B})$.
  - $a \mapsto a$, $b \mapsto b$ est bien défini, fixe W et est un homomorphisme.

Lemme 2.4

Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ des structures au dessus de X et $W \subseteq X$.

- Si $\mathbf{A} \rightarrow_X \mathbf{B}$ alors $\mathbf{A} \rightarrow_W \mathbf{B}$.
    - Un homomorphisme qui fixe X, fixe aussi W.
- $(\mathbf{A} \oplus_W \mathbf{B}) \rightarrow_W (\mathbf{A} \oplus_X \mathbf{B})$.
    - $a \mapsto a$, $b \mapsto b$ est bien défini, fixe W et est un homomorphisme.

Lemme 2.4 (suite)

$\mathbf{A} \to_X \mathbf{C}$ et $\mathbf{B} \to_X \mathbf{C}$
si et seulement si
$(\mathbf{A} \oplus_X \mathbf{B}) \to_X \mathbf{C}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, hook] \arrow[dr] & \mathbf{A} \oplus_X \mathbf{B} \arrow[d, dashed] & \mathbf{B} \arrow[l, hook'] \arrow[dl] \\
& \mathbf{C} &
\end{tikzcd}$$

$\mathbf{C} \to_X \mathbf{A}$ et $\mathbf{C} \to_X \mathbf{B}$
si et seulement si
$\mathbf{C} \to_X (\mathbf{A} \otimes_X \mathbf{B})$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} & \mathbf{A} \otimes_X \mathbf{B} \arrow[l] \arrow[r] & \mathbf{B} \\
& \mathbf{C} \arrow[ul] \arrow[u, dashed] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Lemme 2.4 (suite)

$\mathbf{A} \to_X \mathbf{C}$ et $\mathbf{B} \to_X \mathbf{C}$
si et seulement si
$(\mathbf{A} \oplus_X \mathbf{B}) \to_X \mathbf{C}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, hook] \arrow[dr] & \mathbf{A} \oplus_X \mathbf{B} \arrow[d, dashed] & \mathbf{B} \arrow[l, hook'] \arrow[dl] \\
& \mathbf{C} &
\end{tikzcd}$$

$\mathbf{C} \to_X \mathbf{A}$ et $\mathbf{C} \to_X \mathbf{B}$
si et seulement si
$\mathbf{C} \to_X (\mathbf{A} \otimes_X \mathbf{B})$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} & \mathbf{A} \otimes_X \mathbf{B} \arrow[l] \arrow[r] & \mathbf{B} \\
& \mathbf{C} \arrow[ul] \arrow[u, dashed] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Lemme 2.4 (suite)

$\mathbf{A} \to_X \mathbf{C}$ et $\mathbf{B} \to_X \mathbf{C}$
si et seulement si
$(\mathbf{A} \oplus_X \mathbf{B}) \to_X \mathbf{C}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, hook] \arrow[dr] & \mathbf{A} \oplus_X \mathbf{B} \arrow[d, dashed] & \mathbf{B} \arrow[l, hook'] \arrow[dl] \\
& \mathbf{C} &
\end{tikzcd}$$

$\mathbf{C} \to_X \mathbf{A}$ et $\mathbf{C} \to_X \mathbf{B}$
si et seulement si
$\mathbf{C} \to_X (\mathbf{A} \otimes_X \mathbf{B})$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} & \mathbf{A} \otimes_X \mathbf{B} \arrow[l] \arrow[r] & \mathbf{B} \\
& \mathbf{C} \arrow[ul] \arrow[u, dashed] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Lemme 2.4 (suite)

$\mathbf{A} \to_X \mathbf{C}$ et $\mathbf{B} \to_X \mathbf{C}$
si et seulement si
$(\mathbf{A} \oplus_X \mathbf{B}) \to_X \mathbf{C}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, hook] \arrow[dr] & \mathbf{A} \oplus_X \mathbf{B} \arrow[d, dashed] & \mathbf{B} \arrow[l, hook'] \arrow[dl] \\
& \mathbf{C} &
\end{tikzcd}$$

$\mathbf{C} \to_X \mathbf{A}$ et $\mathbf{C} \to_X \mathbf{B}$
si et seulement si
$\mathbf{C} \to_X (\mathbf{A} \otimes_X \mathbf{B})$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} & \mathbf{A} \otimes_X \mathbf{B} \arrow[l] \arrow[r] & \mathbf{B} \\
& \mathbf{C} \arrow[ul] \arrow[u, dashed] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Graphe de Gaifman

- Le *graphe de Gaifman* $\mathcal{G}(\mathbf{A})$ d'une structure $\mathbf{A}$ est le graphe tel que :
  - les sommets sont les éléments $a \in A$.
  - il y a une arête entre a et a' si $a, a' \in \bar{a}$ pour un $\bar{a}$ qui satisfait une relation atomique dans $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} \models R(\bar{a})$).

Graphe de Gaifman

- Le *graphe de Gaifman* $\mathcal{G}(\mathbf{A})$ d'une structure $\mathbf{A}$ est le graphe tel que :
  - les sommets sont les éléments $a \in A$.
  - il y a une arête entre a et a' si $a, a' \in \bar{a}$ pour un $\bar{a}$ qui satisfait une relation atomique dans $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} \models R(\bar{a})$).

Graphe de Gaifman

- Le *graphe de Gaifman* $\mathcal{G}(\mathbf{A})$ d'une structure $\mathbf{A}$ est le graphe tel que :
  - les sommets sont les éléments $a \in A$.
  - il y a une arête entre a et a' si $a, a' \in \bar{a}$ pour un $\bar{a}$ qui satisfait une relation atomique dans $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} \models R(\bar{a})$).

Logique du premier-order et jeux de Ehrenfeucht-Fraïssé

- Deux structures **A** et **B** satisfont les mêmes formules de la logique du premier-order jusqu'à un rang de quantification *r* ssi une stratégie gagnante existe pour le joueur "constructeur" du jeu de Ehrenfeucht-Fraïssé de rang *r* entre **A** et **B**.
  - Déterminer si une position est gagnante ou perdante n'est fonction que des relations atomiques sur **A** et **B**.
  - Voir le livre de Libkin ou mes exposés des 2008/02/07 et 2008/04/17.

Logique du premier-order et jeux de Ehrenfeucht-Fraïssé

- Deux structures **A** et **B** satisfont les mêmes formules de la logique du premier-order jusqu'à un rang de quantification *r* ssi une stratégie gagnante existe pour le joueur "constructeur" du jeu de Ehrenfeucht-Fraïssé de rang *r* entre **A** et **B**.
  - Déterminer si une position est gagnante ou perdante n'est fonction que des relations atomiques sur **A** et **B**.
  - Voir le livre de Libkin ou mes exposés des 2008/02/07 et 2008/04/17.

Logique du premier-order et jeux de Ehrenfeucht-Fraïssé

- Deux structures **A** et **B** satisfont les mêmes formules de la logique du premier-order jusqu'à un rang de quantification r ssi une stratégie gagnante existe pour le joueur "constructeur" du jeu de Ehrenfeucht-Fraïssé de rang r entre **A** et **B**.
    - Déterminer si une position est gagnante ou perdante n'est fonction que des relations atomiques sur **A** et **B**.
    - Voir le livre de Libkin ou mes exposés des 2008/02/07 et 2008/04/17.

Arborescence

- Une *forêt (finie) enracinée* est un ensemble (fini) d'arbres enracinés finis.
- La *hauteur* d'une forêt est le nombre maximal de sommets sur une branche (chemin de la racine à une feuille).
- La *clôture* d'une forêt enracinée $\mathcal{F}$ est un graphe ayant les mêmes sommets, deux sommets étant adjacents s'ils sont sur une même branche.
- La *profondeur d'arborescence* (`tree-depth`) $td(\mathcal{G})$ d'un graphe fini est le minimum des hauteurs des forêts enracinées dont les clôtures contiennent $\mathcal{G}$.

Arborescence

- Une *forêt (finie) enracinée* est un ensemble (fini) d'arbres enracinés finis.
- La *hauteur* d'une forêt est le nombre maximal de sommets sur une branche (chemin de la racine à une feuille).
- La *clôture* d'une forêt enracinée $\mathcal{F}$ est un graphe ayant les mêmes sommets, deux sommets étant adjacents s'ils sont sur une même branche.
- La *profondeur d'arborescence* (`tree-depth`) $td(\mathcal{G})$ d'un graphe fini est le minimum des hauteurs des forêts enracinées dont les clôtures contiennent $\mathcal{G}$.

Arborescence

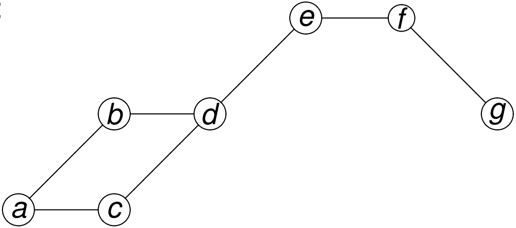
- Une *forêt (finie) enracinée* est un ensemble (fini) d'arbres enracinés finis.
- La *hauteur* d'une forêt est le nombre maximal de sommets sur une branche (chemin de la racine à une feuille).
- La *clôture* d'une forêt enracinée $\mathcal{F}$ est un graphe ayant les mêmes sommets, deux sommets étant adjacents s'ils sont sur une même branche.
- La *profondeur d'arborescence* (`tree-depth`) $td(\mathcal{G})$ d'un graphe fini est le minimum des hauteurs des forêts enracinées dont les clôtures contiennent $\mathcal{G}$.

Arborescence

- Une *forêt (finie) enracinée* est un ensemble (fini) d'arbres enracinés finis.
- La *hauteur* d'une forêt est le nombre maximal de sommets sur une branche (chemin de la racine à une feuille).
- La *clôture* d'une forêt enracinée $\mathcal{F}$ est un graphe ayant les mêmes sommets, deux sommets étant adjacents s'ils sont sur une même branche.
- La *profondeur d'arborescence* (`tree-depth`) $td(\mathcal{G})$ d'un graphe fini est le minimum des hauteurs des forêts enracinées dont les clôtures contiennent $\mathcal{G}$.

Exemple 2.7 (a)

Un graphe $\mathcal{G}$:

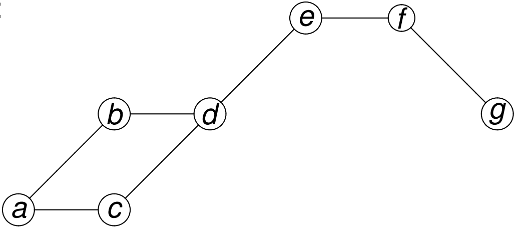


$td(\mathcal{G}) = 3.$

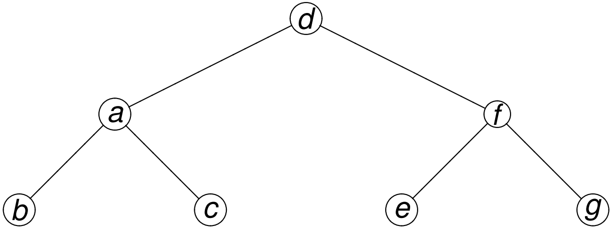
UQÀM
Université du Québec à Montréal

Exemple 2.7 (a)

Un graphe $\mathcal{G}$:



$td(\mathcal{G}) = 3$.



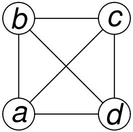
Exemple 2.7 (b)

Le graphe complet sur n sommets est de profondeur d'arborescence n.

Car quel que soit le sommet choisi pour la racine, tous les autres sommets étant reliés, ils devront être dans le même sous-arbre.

Exemple 2.7 (b)

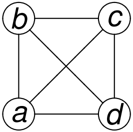
Le graphe complet sur n sommets est de profondeur d'arborescence n.



Car quel que soit le sommet choisi pour la racine, tous les autres sommets étant reliés, ils devront être dans le même sous-arbre.

Exemple 2.7 (b)

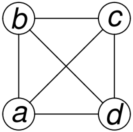
Le graphe complet sur *n* sommets est de profondeur d'arborescence *n*.

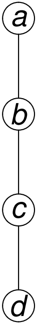


Car quel que soit le sommet choisi pour la racine, tous les autres sommets étant reliés, ils devront être dans le même sous-arbre.

Exemple 2.7 (b)

Le graphe complet sur n sommets est de profondeur d'arborescence n.





Car quel que soit le sommet choisi pour la racine, tous les autres sommets étant reliés, ils devront être dans le même sous-arbre.

Exemple 2.7 (c)

Le graphe chemin P_n est de profondeur d'arborescence $\lfloor \log_2(n) \rfloor + 1$.

P_7 :

$td(P_7) = 3$, car il suffit de récursivement diviser en deux.

Exemple 2.7 (c)

Le graphe chemin P_n est de profondeur d'arborescence $\lfloor \log_2(n) \rfloor + 1$.

P_7 :

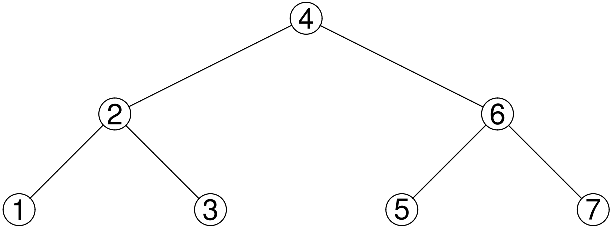
$td(P_7) = 3$, car il suffit de récursivement diviser en deux.

Exemple 2.7 (c)

Le graphe chemin P_n est de profondeur d'arborescence $\lfloor \log_2(n) \rfloor + 1$.

P_7 :

$td(P_7) = 3$, car il suffit de récursivement diviser en deux.



Profondeur d'arborescence au dessus d'un ensemble

- Pour $\mathbf{A}$ une structure telle que $X \subseteq A$, on dénote par $\mathcal{G}(\mathbf{A}) \setminus X$ le sous-graphe induit de $\mathcal{G}(\mathbf{A})$ sur l'ensemble $A \setminus X$.
- La profondeur d'arborescence de $\mathbf{A}$ au dessus de X, notée $td_X(\mathbf{A})$ est $td(\mathcal{G}(\mathbf{A}) \setminus X)$ (0 is $X = A$).

Profondeur d'arborescence au dessus d'un ensemble

- Pour $\mathbf{A}$ une structure telle que $X \subseteq A$, on dénote par $\mathcal{G}(\mathbf{A}) \setminus X$ le sous-graphe induit de $\mathcal{G}(\mathbf{A})$ sur l'ensemble $A \setminus X$.
- La profondeur d'arborescence de $\mathbf{A}$ au dessus de X, notée $td_X(\mathbf{A})$ est $td(\mathcal{G}(\mathbf{A}) \setminus X)$ (0 is $X = A$).

Lemme 2.8

Soient **A** et **B** deux structures finies au dessus de X.

- $td_X(\mathbf{A} \oplus_X \mathbf{B}) = max\{td_X(\mathbf{A}), td_X(\mathbf{B})\}$.
  - $\mathcal{G}(\mathbf{A} \oplus_X \mathbf{B}) \setminus X = \mathcal{G}(\mathbf{A}) \setminus X \cup \mathcal{G}(\mathbf{B}) \setminus X$.
- Si $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$, $td_X(\mathbf{A}) \leq td_X(\mathbf{B})$.
  - La forêt pour $\mathcal{G}(\mathbf{B}) \setminus X$ induira une forêt de hauteur non-supérieure pour $\mathcal{G}(\mathbf{A}) \setminus X$ (prendre la structure induite avec la relation “ancêtre”).

Lemme 2.8

Soient **A** et **B** deux structures finies au dessus de X.

- $td_X(\mathbf{A} \oplus_X \mathbf{B}) = max\{td_X(\mathbf{A}), td_X(\mathbf{B})\}$.
  - $\mathcal{G}(\mathbf{A} \oplus_X \mathbf{B}) \setminus X = \mathcal{G}(\mathbf{A}) \setminus X \cup \mathcal{G}(\mathbf{B}) \setminus X$.
- Si $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$, $td_X(\mathbf{A}) \leq td_X(\mathbf{B})$.
  - La forêt pour $\mathcal{G}(\mathbf{B}) \setminus X$ induira une forêt de hauteur non-supérieure pour $\mathcal{G}(\mathbf{A}) \setminus X$ (prendre la structure induite avec la relation “ancêtre”).

Lemme 2.8

Soient **A** et **B** deux structures finies au dessus de X.

- $td_X(\mathbf{A} \oplus_X \mathbf{B}) = max\{td_X(\mathbf{A}), td_X(\mathbf{B})\}$.
  - $\mathcal{G}(\mathbf{A} \oplus_X \mathbf{B}) \setminus X = \mathcal{G}(\mathbf{A}) \setminus X \cup \mathcal{G}(\mathbf{B}) \setminus X$.
- Si $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$, $td_X(\mathbf{A}) \leq td_X(\mathbf{B})$.
  - La forêt pour $\mathcal{G}(\mathbf{B}) \setminus X$ induira une forêt de hauteur non-supérieure pour $\mathcal{G}(\mathbf{A}) \setminus X$ (prendre la structure induite avec la relation “ancêtre”).

Lemme 2.8

Soient **A** et **B** deux structures finies au dessus de X.

- $td_X(\mathbf{A} \oplus_X \mathbf{B}) = max\{td_X(\mathbf{A}), td_X(\mathbf{B})\}$.
  - $\mathcal{G}(\mathbf{A} \oplus_X \mathbf{B}) \setminus X = \mathcal{G}(\mathbf{A}) \setminus X \cup \mathcal{G}(\mathbf{B}) \setminus X$.
- Si $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$, $td_X(\mathbf{A}) \leq td_X(\mathbf{B})$.
  - La forêt pour $\mathcal{G}(\mathbf{B}) \setminus X$ induira une forêt de hauteur non-supérieure pour $\mathcal{G}(\mathbf{A}) \setminus X$ (prendre la structure induite avec la relation “ancêtre”).

Lemme 2.8

Soient **A** et **B** deux structures finies au dessus de X.

- $td_X(\mathbf{A} \oplus_X \mathbf{B}) = max\{td_X(\mathbf{A}), td_X(\mathbf{B})\}$.
  - $\mathcal{G}(\mathbf{A} \oplus_X \mathbf{B}) \setminus X = \mathcal{G}(\mathbf{A}) \setminus X \cup \mathcal{G}(\mathbf{B}) \setminus X$.
- Si $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$, $td_X(\mathbf{A}) \leq td_X(\mathbf{B})$.
  - La forêt pour $\mathcal{G}(\mathbf{B}) \setminus X$ induira une forêt de hauteur non-supérieure pour $\mathcal{G}(\mathbf{A}) \setminus X$ (prendre la structure induite avec la relation “ancêtre”).

Lemme 2.8 (suite)

- $td_X(\mathbf{A}) \leq td_{X \cup Y}(\mathbf{A}) + |Y|$, pour tout $Y \subseteq A$.
  - Dans la forêt pour $\mathcal{G}(\mathbf{A}) \setminus X$, si on enlève les éléments de Y, au pire, on fait chuter la hauteur de $|Y|$.
- Si $X \neq A$ et si $\mathcal{G}(\mathbf{A}) \setminus X$ est connexe, alors $td_X(\mathbf{A}) = 1 + min_{y \in A \setminus X} td_{X \cup \{y\}}(\mathbf{A})$.
  - Connexe donc la forêt de $\mathcal{G}(\mathbf{A}) \setminus X$ a une seule racine. Si on enlève cette racine y, la hauteur chute de 1 et on a des arbres pour les $\mathcal{G}(\mathbf{A}) \setminus (X \cup \{y\})$.

Lemme 2.8 (suite)

- $td_X(\mathbf{A}) \leq td_{X\cup Y}(\mathbf{A}) + |Y|$, pour tout $Y \subseteq A$.
  - Dans la forêt pour $\mathcal{G}(\mathbf{A}) \setminus X$, si on enlève les éléments de Y, au pire, on fait chuter la hauteur de $|Y|$.
- Si $X \neq A$ et si $\mathcal{G}(\mathbf{A}) \setminus X$ est connexe, alors $td_X(\mathbf{A}) = 1 + min_{y\in A\setminus X} td_{X\cup\{y\}}(\mathbf{A})$.
  - Connexe donc la forêt de $\mathcal{G}(\mathbf{A}) \setminus X$ a une seule racine. Si on enlève cette racine y, la hauteur chute de 1 et on a des arbres pour les $\mathcal{G}(\mathbf{A}) \setminus (X \cup \{y\})$.

Lemme 2.8 (suite)

- $td_X(\mathbf{A}) \leq td_{X \cup Y}(\mathbf{A}) + |Y|$, pour tout $Y \subseteq A$.
  - Dans la forêt pour $\mathcal{G}(\mathbf{A}) \setminus X$, si on enlève les éléments de Y, au pire, on fait chuter la hauteur de $|Y|$.
- Si $X \neq A$ et si $\mathcal{G}(\mathbf{A}) \setminus X$ est connexe, alors $td_X(\mathbf{A}) = 1 + min_{y \in A \setminus X} td_{X \cup \{y\}}(\mathbf{A})$.
  - Connexe donc la forêt de $\mathcal{G}(\mathbf{A}) \setminus X$ a une seule racine. Si on enlève cette racine y, la hauteur chute de 1 et on a des arbres pour les $\mathcal{G}(\mathbf{A}) \setminus (X \cup \{y\})$.

Lemme 2.8 (suite)

- $td_X(\mathbf{A}) \leq td_{X \cup Y}(\mathbf{A}) + |Y|$, pour tout $Y \subseteq A$.
  - Dans la forêt pour $\mathcal{G}(\mathbf{A}) \setminus X$, si on enlève les éléments de Y, au pire, on fait chuter la hauteur de $|Y|$.
- Si $X \neq A$ et si $\mathcal{G}(\mathbf{A}) \setminus X$ est connexe, alors $td_X(\mathbf{A}) = 1 + min_{y \in A \setminus X} td_{X \cup \{y\}}(\mathbf{A})$.
  - Connexe donc la forêt de $\mathcal{G}(\mathbf{A}) \setminus X$ a une seule racine. Si on enlève cette racine y, la hauteur chute de 1 et on a des arbres pour les $\mathcal{G}(\mathbf{A}) \setminus (X \cup \{y\})$.

Lemme 2.8 (suite)

- $td_X(\mathbf{A}) \leq td_{X \cup Y}(\mathbf{A}) + |Y|$, pour tout $Y \subseteq A$.
  - Dans la forêt pour $\mathcal{G}(\mathbf{A}) \setminus X$, si on enlève les éléments de Y, au pire, on fait chuter la hauteur de $|Y|$.
- Si $X \neq A$ et si $\mathcal{G}(\mathbf{A}) \setminus X$ est connexe, alors $td_X(\mathbf{A}) = 1 + min_{y \in A \setminus X} td_{X \cup \{y\}}(\mathbf{A})$.
  - Connexe donc la forêt de $\mathcal{G}(\mathbf{A}) \setminus X$ a une seule racine. Si on enlève cette racine y, la hauteur chute de 1 et on a des arbres pour les $\mathcal{G}(\mathbf{A}) \setminus (X \cup \{y\})$.

Rétraction

- Pour **B** une sous-structure de **A**, un homomorphisme de **A** à **B** est une *rétraction* si sa restriction à B est l'identité. (noté $\mathbf{A} \to_B \mathbf{B}$, mais on utilisera aussi $\mathbf{A} \xrightarrow{retr} \mathbf{B}$).
- On dira alors que **B** est un *rétract* de **A**, ou encore que **A** un *co-rétract* de **B**.
- On dira aussi que l'inclusion $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$ est une *co-rétraction* de **B** vers **A**.
- Notons que si $\mathbf{A} \xrightarrow{retr} \mathbf{B}$ on a alors que **B** est une sous-structure induite de **A**.

Rétraction

- Pour **B** une sous-structure de **A**, un homomorphisme de **A** à **B** est une *rétraction* si sa restriction à B est l'identité. (noté **A** $\to_B$ **B**, mais on utilisera aussi **A** $\overset{retr}{\to}$ **B**).
- On dira alors que **B** est un *rétract* de **A**, ou encore que **A** un *co-rétract* de **B**.
- On dira aussi que l'inclusion **B** $\subseteq$ **A** est une *co-rétraction* de **B** vers **A**.
- Notons que si **A** $\overset{retr}{\to}$ **B** on a alors que **B** est une sous-structure induite de **A**.

Rétraction

- Pour $\mathbf{B}$ une sous-structure de $\mathbf{A}$, un homomorphisme de $\mathbf{A}$ à $\mathbf{B}$ est une *rétraction* si sa restriction à B est l'identité. (noté $\mathbf{A} \rightarrow_B \mathbf{B}$, mais on utilisera aussi $\mathbf{A} \stackrel{retr}{\rightarrow} \mathbf{B}$).
- On dira alors que $\mathbf{B}$ est un *rétract* de $\mathbf{A}$, ou encore que $\mathbf{A}$ un *co-rétract* de $\mathbf{B}$.
- On dira aussi que l'inclusion $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$ est une *co-rétraction* de $\mathbf{B}$ vers $\mathbf{A}$.
- Notons que si $\mathbf{A} \stackrel{retr}{\rightarrow} \mathbf{B}$ on a alors que $\mathbf{B}$ est une sous-structure induite de $\mathbf{A}$.

UQÀM
Université du Québec à Montréal

Rétraction

- Pour $\mathbf{B}$ une sous-structure de $\mathbf{A}$, un homomorphisme de $\mathbf{A}$ à $\mathbf{B}$ est une *rétraction* si sa restriction à B est l'identité. (noté $\mathbf{A} \to_B \mathbf{B}$, mais on utilisera aussi $\mathbf{A} \stackrel{retr}{\to} \mathbf{B}$).
- On dira alors que $\mathbf{B}$ est un *rétract* de $\mathbf{A}$, ou encore que $\mathbf{A}$ un *co-rétract* de $\mathbf{B}$.
- On dira aussi que l'inclusion $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$ est une *co-rétraction* de $\mathbf{B}$ vers $\mathbf{A}$.
- Notons que si $\mathbf{A} \stackrel{retr}{\to} \mathbf{B}$ on a alors que $\mathbf{B}$ est une sous-structure induite de $\mathbf{A}$.

Lemme 2.9 Propriétés des rétractions

- Si $\mathbf{A} \stackrel{retr}{\longrightarrow} \mathbf{B} \stackrel{retr}{\longrightarrow} \mathbf{C}$, on a que $\mathbf{A} \stackrel{retr}{\longrightarrow} \mathbf{C}$.
- $(\mathbf{A} \oplus_X \mathbf{B}) \stackrel{retr}{\longrightarrow} \mathbf{A}$ si et seulement si $\mathbf{B} \to_X \mathbf{A}$.
- $\bigoplus_{i \in I} {}_A\mathbf{B}_i \stackrel{retr}{\longrightarrow} \mathbf{A}$ si et seulement si $\mathbf{B}_i \stackrel{retr}{\longrightarrow} \mathbf{A}$, pour tout $i \in I$.
- Si $\mathbf{A}_{n+1} \stackrel{retr}{\longrightarrow} \mathbf{A}_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a alors que $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{A}_n \stackrel{retr}{\longrightarrow} \mathbf{A}_0$.

Lemme 2.9 Propriétés des rétractions

- Si $\mathbf{A} \overset{retr}{\rightarrow} \mathbf{B} \overset{retr}{\rightarrow} \mathbf{C}$, on a que $\mathbf{A} \overset{retr}{\rightarrow} \mathbf{C}$.
- $(\mathbf{A} \oplus_X \mathbf{B}) \overset{retr}{\rightarrow} \mathbf{A}$ si et seulement si $\mathbf{B} \rightarrow_X \mathbf{A}$.
- $\bigoplus_{i \in I} {}_A \mathbf{B}_i \overset{retr}{\rightarrow} \mathbf{A}$ si et seulement si $\mathbf{B}_i \overset{retr}{\rightarrow} \mathbf{A}$, pour tout $i \in I$.
- Si $\mathbf{A}_{n+1} \overset{retr}{\rightarrow} \mathbf{A}_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a alors que $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{A}_n \overset{retr}{\rightarrow} \mathbf{A}_0$.

Lemme 2.9 Propriétés des rétractions

- Si $\mathbf{A} \overset{retr}{\longrightarrow} \mathbf{B} \overset{retr}{\longrightarrow} \mathbf{C}$, on a que $\mathbf{A} \overset{retr}{\longrightarrow} \mathbf{C}$.
- $(\mathbf{A} \oplus_X \mathbf{B}) \overset{retr}{\longrightarrow} \mathbf{A}$ si et seulement si $\mathbf{B} \to_X \mathbf{A}$.
- $\bigoplus_{i \in I} {}_A \mathbf{B}_i \overset{retr}{\longrightarrow} \mathbf{A}$ si et seulement si $\mathbf{B}_i \overset{retr}{\longrightarrow} \mathbf{A}$, pour tout $i \in I$.
- Si $\mathbf{A}_{n+1} \overset{retr}{\longrightarrow} \mathbf{A}_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a alors que $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{A}_n \overset{retr}{\longrightarrow} \mathbf{A}_0$.

UQÀM
Université du Québec à Montréal

Lemme 2.9 Propriétés des rétractions

- Si $\mathbf{A} \overset{retr}{\longrightarrow} \mathbf{B} \overset{retr}{\longrightarrow} \mathbf{C}$, on a que $\mathbf{A} \overset{retr}{\longrightarrow} \mathbf{C}$.
- $(\mathbf{A} \oplus_X \mathbf{B}) \overset{retr}{\longrightarrow} \mathbf{A}$ si et seulement si $\mathbf{B} \rightarrow_X \mathbf{A}$.
- $\bigoplus_{i \in I} {}_A \mathbf{B}_i \overset{retr}{\longrightarrow} \mathbf{A}$ si et seulement si $\mathbf{B}_i \overset{retr}{\longrightarrow} \mathbf{A}$, pour tout $i \in I$.
- Si $\mathbf{A}_{n+1} \overset{retr}{\longrightarrow} \mathbf{A}_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a alors que $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{A}_n \overset{retr}{\longrightarrow} \mathbf{A}_0$.

Lemme 2.9 Propriétés des rétractions

- Si $\mathbf{A} \overset{retr}{\to} \mathbf{B} \overset{retr}{\to} \mathbf{C}$, on a que $\mathbf{A} \overset{retr}{\to} \mathbf{C}$.
- $(\mathbf{A} \oplus_X \mathbf{B}) \overset{retr}{\to} \mathbf{A}$ si et seulement si $\mathbf{B} \to_X \mathbf{A}$.
- $\bigoplus_{i \in I} {}_A \mathbf{B}_i \overset{retr}{\to} \mathbf{A}$ si et seulement si $\mathbf{B}_i \overset{retr}{\to} \mathbf{A}$, pour tout $i \in I$.
- Si $\mathbf{A}_{n+1} \overset{retr}{\to} \mathbf{A}_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a alors que $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{A}_n \overset{retr}{\to} \mathbf{A}_0$.