# Homomorphism Preservation Theorems de B. Rossman

## 2. Préliminaires (3/3)

Roger Villemaire

Département d'informatique
UQAM

Groupe de Travail HPT
13 mars 2009

# Plan

# Définitions

- Pour **B** une sous-structure de **A**, un homomorphisme de **A** à **B** est une *rétraction* si sa restriction à $B$ est l'identité. (noté $\mathbf{A} \rightarrow_B \mathbf{B}$, mais on utilisera aussi $\mathbf{A} \stackrel{retr}{\rightarrow} \mathbf{B}$).
- Une structure **A** au dessus d'un ensemble $X$ est un *noyau* au dessus de $X$ si tout homomorphisme $\mathbf{A} \rightarrow_X \mathbf{A}$ est un automorphisme (un isomorphisme de **A** vers **A**).
- Un homomorphisme est une forme de compression. Dans ce contexte le noyau (`core`) est d'une certaine façon "incompressible".

# Définitions

- Pour **B** une sous-structure de **A**, un homomorphisme de **A** à **B** est une *rétraction* si sa restriction à $B$ est l'identité. (noté $\mathbf{A} \rightarrow_B \mathbf{B}$, mais on utilisera aussi $\mathbf{A} \stackrel{retr}{\rightarrow} \mathbf{B}$).
- Une structure **A** au dessus d'un ensemble $X$ est un *noyau* au dessus de $X$ si tout homomorphisme $\mathbf{A} \rightarrow_X \mathbf{A}$ est un automorphisme (un isomorphisme de **A** vers **A**).
- Un homomorphisme est une forme de compression. Dans ce contexte le noyau (`core`) est d'une certaine façon "incompressible".

# Définitions

- Pour **B** une sous-structure de **A**, un homomorphisme de **A** à **B** est une *rétraction* si sa restriction à $B$ est l'identité. (noté $\mathbf{A} \rightarrow_B \mathbf{B}$, mais on utilisera aussi $\mathbf{A} \stackrel{retr}{\rightarrow} \mathbf{B}$).
- Une structure **A** au dessus d'un ensemble $X$ est un *noyau* au dessus de $X$ si tout homomorphisme $\mathbf{A} \rightarrow_X \mathbf{A}$ est un automorphisme (un isomorphisme de **A** vers **A**).
- Un homomorphisme est une forme de compression. Dans ce contexte le noyau (`core`) est d'une certaine façon "incompressible".

# Équivalence

- Deux noyaux au dessus de $X$ sont homomorphiquement équivalents au dessus de $X$ ($\mathbf{N}_1 \rightleftarrows_X \mathbf{N}_2$) si et seulement s'ils sont isomorphes au dessus de $X$ ($\mathbf{N}_1 \cong_X \mathbf{N}_2$).
  - (<=) des définitions.
  - (=>) $\mathbf{N}_1 \to_X \mathbf{N}_2 \to_X \mathbf{N}_1$.

# Équivalence

- Deux noyaux au dessus de $X$ sont homomorphiquement équivalents au dessus de $X$ ($\mathbf{N}_1 \rightleftarrows_X \mathbf{N}_2$) si et seulement s'ils sont isomorphes au dessus de $X$ ($\mathbf{N}_1 \cong_X \mathbf{N}_2$).
  - (<=) des définitions.
  - (=>) $\mathbf{N}_1 \rightarrow_X \mathbf{N}_2 \rightarrow_X \mathbf{N}_1$.

# Équivalence

- Deux noyaux au dessus de $X$ sont homomorphiquement équivalents au dessus de $X$ ($\mathbf{N}_1 \rightleftarrows_X \mathbf{N}_2$) si et seulement s'ils sont isomorphes au dessus de $X$ ($\mathbf{N}_1 \cong_X \mathbf{N}_2$).
  - (<=) des définitions.
  - (=>) $\mathbf{N}_1 \rightarrow_X \mathbf{N}_2 \rightarrow_X \mathbf{N}_1$.

# Lemme 2.10

Soit **A** une structure finie telle que $X \subseteq A$.

- **A** est un noyau au dessus de $X$, si et seulement s'il n'a pas de rétract propre au dessus de $X$ (tout rétract **B** de **A** est soit tel que $B = A$, soit tel que $X \not\subseteq B$).
  - (=>) $\mathbf{A} \overset{retr}{\to} \mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$.
  - (<=) $h : \mathbf{A} \to_X \mathbf{A}$, $h(A)$ de taille minimale. $h(h(A))$ est de même taille. On observe $h(A)$ dans $\mathbf{A} \to_X \mathbf{A} \to_X \mathbf{A} \to_X \cdots$ pour voir que $h(A)$ est un rétract.

# Lemme 2.10

Soit **A** une structure finie telle que $X \subseteq A$.

- **A** est un noyau au dessus de $X$, si et seulement s'il n'a pas de rétract propre au dessus de $X$ (tout rétract **B** de **A** est soit tel que $B = A$, soit tel que $X \not\subseteq B$).
  - (=>) $\mathbf{A} \stackrel{retr}{\to} \mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$.
  - (<=) $h : \mathbf{A} \to_X \mathbf{A}$, $h(A)$ de taille minimale. $h(h(A))$ est de même taille. On observe $h(A)$ dans $\mathbf{A} \to_X \mathbf{A} \to_X \mathbf{A} \to_X \cdots$ pour voir que $h(A)$ est un rétract.

# Lemme 2.10

Soit **A** une structure finie telle que $X \subseteq A$.

- **A** est un noyau au dessus de $X$, si et seulement s'il n'a pas de rétract propre au dessus de $X$ (tout rétract **B** de **A** est soit tel que $B = A$, soit tel que $X \not\subseteq B$).
  - (=>) $\mathbf{A} \stackrel{retr}{\to} \mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$.
  - (<=) $h : \mathbf{A} \to_X \mathbf{A}$, $h(A)$ de taille minimale. $h(h(A))$ est de même taille. On observe $h(A)$ dans $\mathbf{A} \to_X \mathbf{A} \to_X \mathbf{A} \to_X \cdots$ pour voir que $h(A)$ est un rétract.

# Lemme 2.10

Soit **A** une structure finie telle que $X \subseteq A$.

- **A** est un noyau au dessus de $X$, si et seulement s'il n'a pas de rétract propre au dessus de $X$ (tout rétract **B** de **A** est soit tel que $B = A$, soit tel que $X \not\subseteq B$).
  - (=>) $\mathbf{A} \stackrel{retr}{\to} \mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$.
  - (<=) $h : \mathbf{A} \to_X \mathbf{A}$, $h(A)$ de taille minimale. $h(h(A))$ est de même taille. On observe $h(A)$ dans $\mathbf{A} \to_X \mathbf{A} \to_X \mathbf{A} \to_X \cdots$ pour voir que $h(A)$ est un rétract.

# Lemme 2.10 (suite)

- De plus, $\mathbf{A}$ a un rétract qui est un noyau au dessus de $X$.
  - Prendre $\mathbf{A} \overset{retr}{\rightarrow} \mathbf{B}$ avec $X \subseteq B$ et $B$ de taille minimale. $\mathbf{B}$ n'a pas de rétract propre, donc c'est un noyau.
- Finalement, si $\mathbf{A} \overset{retr}{\rightarrow} \mathbf{B}_1$ et $\mathbf{A} \overset{retr}{\rightarrow} \mathbf{B}_2$ avec $\mathbf{B}_1$ et $\mathbf{B}_2$ deux noyaux au dessus de $X$, on a alors que $\mathbf{B}_1 \cong_X \mathbf{B}_2$.
  - $\mathbf{B}_1 \subseteq \mathbf{A} \overset{retr}{\rightarrow} \mathbf{B}_2 \subseteq \mathbf{A} \overset{retr}{\rightarrow} \mathbf{B}_1$.

# Lemme 2.10 (suite)

- De plus, **A** a un rétract qui est un noyau au dessus de $X$.
  - Prendre $\mathbf{A} \overset{retr}{\to} \mathbf{B}$ avec $X \subseteq B$ et $B$ de taille minimale. **B** n'a pas de rétract propre, donc c'est un noyau.
- Finalement, si $\mathbf{A} \overset{retr}{\to} \mathbf{B}_1$ et $\mathbf{A} \overset{retr}{\to} \mathbf{B}_2$ avec $\mathbf{B}_1$ et $\mathbf{B}_2$ deux noyaux au dessus de $X$, on a alors que $\mathbf{B}_1 \cong_X \mathbf{B}_2$.
  - $\mathbf{B}_1 \subseteq \mathbf{A} \overset{retr}{\to} \mathbf{B}_2 \subseteq \mathbf{A} \overset{retr}{\to} \mathbf{B}_1$.

# Lemme 2.10 (suite)

- De plus, $\mathbf{A}$ a un rétract qui est un noyau au dessus de $X$.
  - Prendre $\mathbf{A} \stackrel{retr}{\to} \mathbf{B}$ avec $X \subseteq B$ et $B$ de taille minimale. $\mathbf{B}$ n'a pas de rétract propre, donc c'est un noyau.
- Finalement, si $\mathbf{A} \stackrel{retr}{\to} \mathbf{B}_1$ et $\mathbf{A} \stackrel{retr}{\to} \mathbf{B}_2$ avec $\mathbf{B}_1$ et $\mathbf{B}_2$ deux noyaux au dessus de $X$, on a alors que $\mathbf{B}_1 \cong_X \mathbf{B}_2$.
  - $\mathbf{B}_1 \subseteq \mathbf{A} \stackrel{retr}{\to} \mathbf{B}_2 \subseteq \mathbf{A} \stackrel{retr}{\to} \mathbf{B}_1$.

# Lemme 2.10 (suite)

- De plus, **A** a un rétract qui est un noyau au dessus de $X$.
  - Prendre $\mathbf{A} \overset{retr}{\to} \mathbf{B}$ avec $X \subseteq B$ et $B$ de taille minimale. **B** n'a pas de rétract propre, donc c'est un noyau.
- Finalement, si $\mathbf{A} \overset{retr}{\to} \mathbf{B}_1$ et $\mathbf{A} \overset{retr}{\to} \mathbf{B}_2$ avec $\mathbf{B}_1$ et $\mathbf{B}_2$ deux noyaux au dessus de $X$, on a alors que $\mathbf{B}_1 \cong_X \mathbf{B}_2$.
  - $\mathbf{B}_1 \subseteq \mathbf{A} \overset{retr}{\to} \mathbf{B}_2 \subseteq \mathbf{A} \overset{retr}{\to} \mathbf{B}_1$.

# Lemme 2.10 (suite)

- De plus, $\mathbf{A}$ a un rétract qui est un noyau au dessus de $X$.
  - Prendre $\mathbf{A} \overset{retr}{\to} \mathbf{B}$ avec $X \subseteq B$ et $B$ de taille minimale. $\mathbf{B}$ n'a pas de rétract propre, donc c'est un noyau.
- Finalement, si $\mathbf{A} \overset{retr}{\to} \mathbf{B}_1$ et $\mathbf{A} \overset{retr}{\to} \mathbf{B}_2$ avec $\mathbf{B}_1$ et $\mathbf{B}_2$ deux noyaux au dessus de $X$, on a alors que $\mathbf{B}_1 \cong_X \mathbf{B}_2$.
  - $\mathbf{B}_1 \subseteq \mathbf{A} \overset{retr}{\to} \mathbf{B}_2 \subseteq \mathbf{A} \overset{retr}{\to} \mathbf{B}_1$.

# Noyaux canoniques

- Fixons une classe $\mathcal{C}_X$ de noyaux finis au dessus de $X$ contenant exactement un représentant par classe de $\cong_X$-équivalence. Les éléments de $\mathcal{C}_X$ seront appelés les *noyaux canoniques*.
- L'unique rétract de $\mathbf{A}$ qui est dans $\mathcal{C}_X$ est appelé le *noyau canonique de* $\mathbf{A}$ *au dessus de* $X$ et est dénoté par $\mathbf{Core}_X(\mathbf{A})$.

# Noyaux canoniques

- Fixons une classe $\mathcal{C}_X$ de noyaux finis au dessus de $X$ contenant exactement un représentant par classe de $\cong_X$-équivalence. Les éléments de $\mathcal{C}_X$ seront appelés les *noyaux canoniques*.
- L'unique rétract de **A** qui est dans $\mathcal{C}_X$ est appelé le *noyau canonique de* **A** *au dessus de* $X$ et est dénoté par $\mathbf{Core}_X(\mathbf{A})$.

# Lemme 2.11

- Pour toute structure finie **A** et $X \subseteq A$, il existe un unique **C** $\in \mathcal{C}$ tel que **A** $\rightleftarrows_X$ **C**.
  - $\mathbf{Core}_X(\mathbf{A})$ fera l'affaire.
- De plus, $td_X(\mathbf{C}) \leq td_X(\mathbf{A})$ et tout homomorphisme $h : \mathbf{C} \rightarrow_X \mathbf{A}$ est injectif et satisfait $\mathbf{A} \xrightarrow{retr} h(\mathcal{C})$.
  - $\mathbf{C} = \mathbf{Core}_X(\mathbf{A}) \subseteq \mathbf{A}$ donc $td_X(\mathbf{C}) \leq td_X(\mathbf{A})$.
  - $\mathbf{C} \xrightarrow{h}_X \mathbf{A} \rightarrow_X \mathbf{C}$, est une bijection donc $h$ est injectif et $h(\mathbf{C})$ est isomorphe à **C** au dessus de $X$ et est donc un rétract de **A**.

# Lemme 2.11

- Pour toute structure finie **A** et $X \subseteq A$, il existe un unique **C** $\in \mathcal{C}$ tel que **A** $\rightleftarrows_X$ **C.**
  - **Core**$_X$(**A**) fera l'affaire.
- De plus, $td_X(\mathbf{C}) \leq td_X(\mathbf{A})$ et tout homomorphisme $h : \mathbf{C} \rightarrow_X \mathbf{A}$ est injectif et satisfait $\mathbf{A} \overset{retr}{\rightarrow} h(\mathcal{C})$.
  - $\mathbf{C} = \mathbf{Core}_X(\mathbf{A}) \subseteq \mathbf{A}$ donc $td_X(\mathbf{C}) \leq td_X(\mathbf{A})$.
  - $\mathbf{C} \overset{h}{\rightarrow}_X \mathbf{A} \rightarrow_X \mathbf{C}$, est une bijection donc $h$ est injectif et $h(\mathbf{C})$ est isomorphe à **C** au dessus de $X$ et est donc un rétract de **A**.

# Lemme 2.11

- Pour toute structure finie $\mathbf{A}$ et $X \subseteq A$, il existe un unique $\mathbf{C} \in \mathcal{C}$ tel que $\mathbf{A} \rightleftarrows_X \mathbf{C}$.
  - $\mathbf{Core}_X(\mathbf{A})$ fera l'affaire.
- De plus, $td_X(\mathbf{C}) \leq td_X(\mathbf{A})$ et tout homomorphisme $h : \mathbf{C} \to_X \mathbf{A}$ est injectif et satisfait $\mathbf{A} \stackrel{retr}{\to} h(\mathcal{C})$.
  - $\mathbf{C} = \mathbf{Core}_X(\mathbf{A}) \subseteq \mathbf{A}$ donc $td_X(\mathbf{C}) \leq td_X(\mathbf{A})$.
  - $\mathbf{C} \xrightarrow{h}_X \mathbf{A} \to_X \mathbf{C}$, est une bijection donc $h$ est injectif et $h(\mathbf{C})$ est isomorphe à $\mathbf{C}$ au dessus de $X$ et est donc un rétract de $\mathbf{A}$.

# Lemme 2.11

- Pour toute structure finie $\mathbf{A}$ et $X \subseteq A$, il existe un unique $\mathbf{C} \in \mathcal{C}$ tel que $\mathbf{A} \rightleftarrows_X \mathbf{C}$.
  - $\mathbf{Core}_X(\mathbf{A})$ fera l'affaire.
- De plus, $td_X(\mathbf{C}) \leq td_X(\mathbf{A})$ et tout homomorphisme $h : \mathbf{C} \rightarrow_X \mathbf{A}$ est injectif et satisfait $\mathbf{A} \stackrel{retr}{\rightarrow} h(\mathcal{C})$.
  - $\mathbf{C} = \mathbf{Core}_X(\mathbf{A}) \subseteq \mathbf{A}$ donc $td_X(\mathbf{C}) \leq td_X(\mathbf{A})$.
  - $\mathbf{C} \xrightarrow{h}_X \mathbf{A} \rightarrow_X \mathbf{C}$, est une bijection donc $h$ est injectif et $h(\mathbf{C})$ est isomorphe à $\mathbf{C}$ au dessus de $X$ et est donc un rétract de $\mathbf{A}$.

# Lemme 2.11

- Pour toute structure finie $\mathbf{A}$ et $X \subseteq A$, il existe un unique $\mathbf{C} \in \mathcal{C}$ tel que $\mathbf{A} \rightleftarrows_X \mathbf{C}$.
  - $\mathbf{Core}_X(\mathbf{A})$ fera l'affaire.
- De plus, $td_X(\mathbf{C}) \leq td_X(\mathbf{A})$ et tout homomorphisme $h : \mathbf{C} \rightarrow_X \mathbf{A}$ est injectif et satisfait $\mathbf{A} \stackrel{retr}{\rightarrow} h(\mathcal{C})$.
  - $\mathbf{C} = \mathbf{Core}_X(\mathbf{A}) \subseteq \mathbf{A}$ donc $td_X(\mathbf{C}) \leq td_X(\mathbf{A})$.
  - $\mathbf{C} \stackrel{h}{\rightarrow}_X \mathbf{A} \rightarrow_X \mathbf{C}$, est une bijection donc $h$ est injectif et $h(\mathbf{C})$ est isomorphe à $\mathbf{C}$ au dessus de $X$ et est donc un rétract de $\mathbf{A}$.

# Treillis des homomorphismes

- La relation $\rightarrow_X$ est un ordre partiel sur $\mathcal{C}_X$.
  - réflexif : $\mathbf{C} \rightarrow_X \mathbf{C}$.
  - antisymétrique : Si $\mathbf{C}_1 \rightarrow_X \mathbf{C}_2$ et $\mathbf{C}_2 \rightarrow_X \mathbf{C}_1$ alors $\mathbf{C}_1 \cong_X \mathbf{C}_2$.
  - transitif : Si $\mathbf{C}_1 \rightarrow_X \mathbf{C}_2$ et $\mathbf{C}_2 \rightarrow_X \mathbf{C}_3$ alors $\mathbf{C}_1 \rightarrow_X \mathbf{C}_3$.
- De plus, l'ensemble partiellement ordonné $(\mathcal{C}_X, \rightarrow_X)$ est un treilli. Pour tous $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, il existe :
  - une plus petite borne supérieure,
  - une plus grande borne inférieure.
- Ce treilli est appelé *treilli des homomorphismes* (`homomorphism lattice`) en combinatoire.

# Treillis des homomorphismes

- La relation $\rightarrow_X$ est un ordre partiel sur $\mathcal{C}_X$.
  - réflexif : $\mathbf{C} \rightarrow_X \mathbf{C}$.
  - antisymétrique : Si $\mathbf{C}_1 \rightarrow_X \mathbf{C}_2$ et $\mathbf{C}_2 \rightarrow_X \mathbf{C}_1$ alors $\mathbf{C}_1 \cong_X \mathbf{C}_2$.
  - transitif : Si $\mathbf{C}_1 \rightarrow_X \mathbf{C}_2$ et $\mathbf{C}_2 \rightarrow_X \mathbf{C}_3$ alors $\mathbf{C}_1 \rightarrow_X \mathbf{C}_3$.
- De plus, l'ensemble partiellement ordonné $(\mathcal{C}_X, \rightarrow_X)$ est un treilli. Pour tous $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, il existe :
  - une plus petite borne supérieure,
  - une plus grande borne inférieure.
- Ce treilli est appelé *treilli des homomorphismes* (`homomorphism lattice`) en combinatoire.

## Treillis des homomorphismes

- La relation $\rightarrow_X$ est un ordre partiel sur $\mathcal{C}_X$.
  - réflexif : $\mathbf{C} \rightarrow_X \mathbf{C}$.
  - antisymétrique : Si $\mathbf{C}_1 \rightarrow_X \mathbf{C}_2$ et $\mathbf{C}_2 \rightarrow_X \mathbf{C}_1$ alors $\mathbf{C}_1 \cong_X \mathbf{C}_2$.
  - transitif : Si $\mathbf{C}_1 \rightarrow_X \mathbf{C}_2$ et $\mathbf{C}_2 \rightarrow_X \mathbf{C}_3$ alors $\mathbf{C}_1 \rightarrow_X \mathbf{C}_3$.
- De plus, l'ensemble partiellement ordonné $(\mathcal{C}_X, \rightarrow_X)$ est un treilli. Pour tous $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, il existe :
  - une plus petite borne supérieure,
  - une plus grande borne inférieure.
- Ce treilli est appelé *treilli des homomorphismes* (`homomorphism lattice`) en combinatoire.

# Treillis des homomorphismes

- La relation $\rightarrow_X$ est un ordre partiel sur $\mathcal{C}_X$.
  - réflexif : $\mathbf{C} \rightarrow_X \mathbf{C}$.
  - antisymétrique : Si $\mathbf{C}_1 \rightarrow_X \mathbf{C}_2$ et $\mathbf{C}_2 \rightarrow_X \mathbf{C}_1$ alors $\mathbf{C}_1 \cong_X \mathbf{C}_2$.
  - transitif : Si $\mathbf{C}_1 \rightarrow_X \mathbf{C}_2$ et $\mathbf{C}_2 \rightarrow_X \mathbf{C}_3$ alors $\mathbf{C}_1 \rightarrow_X \mathbf{C}_3$.
- De plus, l'ensemble partiellement ordonné $(\mathcal{C}_X, \rightarrow_X)$ est un treilli. Pour tous $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, il existe :
  - une plus petite borne supérieure,
  - une plus grande borne inférieure.
- Ce treilli est appelé *treilli des homomorphismes* (`homomorphism lattice`) en combinatoire.

# Treillis des homomorphismes

- La relation $\rightarrow_X$ est un ordre partiel sur $\mathcal{C}_X$.
  - réflexif : $\mathbf{C} \rightarrow_X \mathbf{C}$.
  - antisymétrique : Si $\mathbf{C}_1 \rightarrow_X \mathbf{C}_2$ et $\mathbf{C}_2 \rightarrow_X \mathbf{C}_1$ alors $\mathbf{C}_1 \cong_X \mathbf{C}_2$.
  - transitif : Si $\mathbf{C}_1 \rightarrow_X \mathbf{C}_2$ et $\mathbf{C}_2 \rightarrow_X \mathbf{C}_3$ alors $\mathbf{C}_1 \rightarrow_X \mathbf{C}_3$.
- De plus, l'ensemble partiellement ordonné $(\mathcal{C}_X, \rightarrow_X)$ est un treilli. Pour tous $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, il existe :
  - une plus petite borne supérieure,
  - une plus grande borne inférieure.
- Ce treilli est appelé *treilli des homomorphismes* (`homomorphism lattice`) en combinatoire.

# Treillis des homomorphismes

- La relation $\to_X$ est un ordre partiel sur $\mathcal{C}_X$.
  - réflexif : $\mathbf{C} \to_X \mathbf{C}$.
  - antisymétrique : Si $\mathbf{C}_1 \to_X \mathbf{C}_2$ et $\mathbf{C}_2 \to_X \mathbf{C}_1$ alors $\mathbf{C}_1 \cong_X \mathbf{C}_2$.
  - transitif : Si $\mathbf{C}_1 \to_X \mathbf{C}_2$ et $\mathbf{C}_2 \to_X \mathbf{C}_3$ alors $\mathbf{C}_1 \to_X \mathbf{C}_3$.
- De plus, l'ensemble partiellement ordonné $(\mathcal{C}_X, \to_X)$ est un treilli. Pour tous $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, il existe :
  - une plus petite borne supérieure,
  - une plus grande borne inférieure.
- Ce treilli est appelé *treilli des homomorphismes* (`homomorphism lattice`) en combinatoire.

# Treillis des homomorphismes

- La relation $\rightarrow_X$ est un ordre partiel sur $\mathcal{C}_X$.
  - réflexif : $\mathbf{C} \rightarrow_X \mathbf{C}$.
  - antisymétrique : Si $\mathbf{C}_1 \rightarrow_X \mathbf{C}_2$ et $\mathbf{C}_2 \rightarrow_X \mathbf{C}_1$ alors $\mathbf{C}_1 \cong_X \mathbf{C}_2$.
  - transitif : Si $\mathbf{C}_1 \rightarrow_X \mathbf{C}_2$ et $\mathbf{C}_2 \rightarrow_X \mathbf{C}_3$ alors $\mathbf{C}_1 \rightarrow_X \mathbf{C}_3$.
- De plus, l'ensemble partiellement ordonné $(\mathcal{C}_X, \rightarrow_X)$ est un treilli. Pour tous $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, il existe :
  - une plus petite borne supérieure,
  - une plus grande borne inférieure.
- Ce treilli est appelé *treilli des homomorphismes* (`homomorphism lattice`) en combinatoire.

# Treillis des homomorphismes

- La relation $\rightarrow_X$ est un ordre partiel sur $\mathcal{C}_X$.
  - réflexif : $\mathbf{C} \rightarrow_X \mathbf{C}$.
  - antisymétrique : Si $\mathbf{C}_1 \rightarrow_X \mathbf{C}_2$ et $\mathbf{C}_2 \rightarrow_X \mathbf{C}_1$ alors $\mathbf{C}_1 \cong_X \mathbf{C}_2$.
  - transitif : Si $\mathbf{C}_1 \rightarrow_X \mathbf{C}_2$ et $\mathbf{C}_2 \rightarrow_X \mathbf{C}_3$ alors $\mathbf{C}_1 \rightarrow_X \mathbf{C}_3$.
- De plus, l'ensemble partiellement ordonné $(\mathcal{C}_X, \rightarrow_X)$ est un treilli. Pour tous $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, il existe :
  - une plus petite borne supérieure,
  - une plus grande borne inférieure.
- Ce treilli est appelé *treilli des homomorphismes* (`homomorphism lattice`) en combinatoire.

# Treillis (démonstration)

- Du lemme 2.4 (3,4) on a que :
  - $\mathbf{Core}_X(\mathbf{C}_1 \oplus_X \mathbf{C}_2)$ est la plus petite borne supérieure,
    - $\mathbf{C}_1 \to_X \mathbf{C}_1 \oplus_X \mathbf{C}_2 \to_X \mathbf{Core}_X(\mathbf{C}_1 \oplus_X \mathbf{C}_2)$, même chose pour $\mathbf{C}_2$.
    - Si $\mathbf{C}_1 \to_X \mathbf{C}$ et $\mathbf{C}_2 \to_X \mathbf{C}$, $\mathbf{C}_1 \oplus_X \mathbf{C}_2 \to_X \mathbf{C}$ et donc $\mathbf{Core}_X(\mathbf{C}_1 \oplus_X \mathbf{C}_2) \to_X \mathbf{C}_1 \oplus_X \mathbf{C}_2 \to_X \mathbf{C}$.
- $\mathbf{Core}_X(\mathbf{C}_1 \otimes_X \mathbf{C}_2)$ est la plus grande borne inférieure.
  - $\mathbf{Core}_X(\mathbf{C}_1 \otimes_X \mathbf{C}_2) \to_X \mathbf{C}_1 \otimes_X \mathbf{C}_2 \to_X \mathbf{C}_1$, même chose pour $\mathbf{C}_2$.
  - Si $\mathbf{C} \to_X \mathbf{C}_1$ et $\mathbf{C} \to_X \mathbf{C}_2$, $\mathbf{C} \to_X \mathbf{C}_1 \otimes_X \mathbf{C}_2$ et donc $\mathbf{C} \to_X \mathbf{C}_1 \otimes_X \mathbf{C}_2 \to_X \mathbf{Core}_X(\mathbf{C}_1 \otimes_X \mathbf{C}_2)$.

# Treillis (démonstration)

- Du lemme 2.4 (3,4) on a que :
  - $\mathbf{Core}_X(\mathbf{C}_1 \oplus_X \mathbf{C}_2)$ est la plus petite borne supérieure,
    - $\mathbf{C}_1 \to_X \mathbf{C}_1 \oplus_X \mathbf{C}_2 \to_X \mathbf{Core}_X(\mathbf{C}_1 \oplus_X \mathbf{C}_2)$, même chose pour $\mathbf{C}_2$.
    - Si $\mathbf{C}_1 \to_X \mathbf{C}$ et $\mathbf{C}_2 \to_X \mathbf{C}$, $\mathbf{C}_1 \oplus_X \mathbf{C}_2 \to_X \mathbf{C}$ et donc $\mathbf{Core}_X(\mathbf{C}_1 \oplus_X \mathbf{C}_2) \to_X \mathbf{C}_1 \oplus_X \mathbf{C}_2 \to_X \mathbf{C}$.
- $\mathbf{Core}_X(\mathbf{C}_1 \otimes_X \mathbf{C}_2)$ est la plus grande borne inférieure.
  - $\mathbf{Core}_X(\mathbf{C}_1 \otimes_X \mathbf{C}_2) \to_X \mathbf{C}_1 \otimes_X \mathbf{C}_2 \to_X \mathbf{C}_1$, même chose pour $\mathbf{C}_2$.
  - Si $\mathbf{C} \to_X \mathbf{C}_1$ et $\mathbf{C} \to_X \mathbf{C}_2$, $\mathbf{C} \to_X \mathbf{C}_1 \otimes_X \mathbf{C}_2$ et donc $\mathbf{C} \to_X \mathbf{C}_1 \otimes_X \mathbf{C}_2 \to_X \mathbf{Core}_X(\mathbf{C}_1 \otimes_X \mathbf{C}_2)$.

# Treillis (démonstration)

- Du lemme 2.4 (3,4) on a que :
  - $\mathbf{Core}_X(\mathbf{C}_1 \oplus_X \mathbf{C}_2)$ est la plus petite borne supérieure,
    - $\mathbf{C}_1 \to_X \mathbf{C}_1 \oplus_X \mathbf{C}_2 \to_X \mathbf{Core}_X(\mathbf{C}_1 \oplus_X \mathbf{C}_2)$, même chose pour $\mathbf{C}_2$.
    - Si $\mathbf{C}_1 \to_X \mathbf{C}$ et $\mathbf{C}_2 \to_X \mathbf{C}$, $\mathbf{C}_1 \oplus_X \mathbf{C}_2 \to_X \mathbf{C}$ et donc $\mathbf{Core}_X(\mathbf{C}_1 \oplus_X \mathbf{C}_2) \to_X \mathbf{C}_1 \oplus_X \mathbf{C}_2 \to_X \mathbf{C}$.
- $\mathbf{Core}_X(\mathbf{C}_1 \otimes_X \mathbf{C}_2)$ est la plus grande borne inférieure.
  - $\mathbf{Core}_X(\mathbf{C}_1 \otimes_X \mathbf{C}_2) \to_X \mathbf{C}_1 \otimes_X \mathbf{C}_2 \to_X \mathbf{C}_1$, même chose pour $\mathbf{C}_2$.
  - Si $\mathbf{C} \to_X \mathbf{C}_1$ et $\mathbf{C} \to_X \mathbf{C}_2$, $\mathbf{C} \to_X \mathbf{C}_1 \otimes_X \mathbf{C}_2$ et donc $\mathbf{C} \to_X \mathbf{C}_1 \otimes_X \mathbf{C}_2 \to_X \mathbf{Core}_X(\mathbf{C}_1 \otimes_X \mathbf{C}_2)$.

UQÀM Université du Québec à Montréal

# Treillis (démonstration)

- Du lemme 2.4 (3,4) on a que :
  - $\mathbf{Core}_X(\mathbf{C}_1 \oplus_X \mathbf{C}_2)$ est la plus petite borne supérieure,
    - $\mathbf{C}_1 \to_X \mathbf{C}_1 \oplus_X \mathbf{C}_2 \to_X \mathbf{Core}_X(\mathbf{C}_1 \oplus_X \mathbf{C}_2)$, même chose pour $\mathbf{C}_2$.
    - Si $\mathbf{C}_1 \to_X \mathbf{C}$ et $\mathbf{C}_2 \to_X \mathbf{C}$, $\mathbf{C}_1 \oplus_X \mathbf{C}_2 \to_X \mathbf{C}$ et donc $\mathbf{Core}_X(\mathbf{C}_1 \oplus_X \mathbf{C}_2) \to_X \mathbf{C}_1 \oplus_X \mathbf{C}_2 \to_X \mathbf{C}$.
- $\mathbf{Core}_X(\mathbf{C}_1 \otimes_X \mathbf{C}_2)$ est la plus grande borne inférieure.
  - $\mathbf{Core}_X(\mathbf{C}_1 \otimes_X \mathbf{C}_2) \to_X \mathbf{C}_1 \otimes_X \mathbf{C}_2 \to_X \mathbf{C}_1$, même chose pour $\mathbf{C}_2$.
  - Si $\mathbf{C} \to_X \mathbf{C}_1$ et $\mathbf{C} \to_X \mathbf{C}_2$, $\mathbf{C} \to_X \mathbf{C}_1 \otimes_X \mathbf{C}_2$ et donc $\mathbf{C} \to_X \mathbf{C}_1 \otimes_X \mathbf{C}_2 \to_X \mathbf{Core}_X(\mathbf{C}_1 \otimes_X \mathbf{C}_2)$.

# Treillis (démonstration)

- Du lemme 2.4 (3,4) on a que :
  - $\mathbf{Core}_X(\mathbf{C}_1 \oplus_X \mathbf{C}_2)$ est la plus petite borne supérieure,
    - $\mathbf{C}_1 \to_X \mathbf{C}_1 \oplus_X \mathbf{C}_2 \to_X \mathbf{Core}_X(\mathbf{C}_1 \oplus_X \mathbf{C}_2)$, même chose pour $\mathbf{C}_2$.
    - Si $\mathbf{C}_1 \to_X \mathbf{C}$ et $\mathbf{C}_2 \to_X \mathbf{C}$, $\mathbf{C}_1 \oplus_X \mathbf{C}_2 \to_X \mathbf{C}$ et donc $\mathbf{Core}_X(\mathbf{C}_1 \oplus_X \mathbf{C}_2) \to_X \mathbf{C}_1 \oplus_X \mathbf{C}_2 \to_X \mathbf{C}$.
- $\mathbf{Core}_X(\mathbf{C}_1 \otimes_X \mathbf{C}_2)$ est la plus grande borne inférieure.
  - $\mathbf{Core}_X(\mathbf{C}_1 \otimes_X \mathbf{C}_2) \to_X \mathbf{C}_1 \otimes_X \mathbf{C}_2 \to_X \mathbf{C}_1$, même chose pour $\mathbf{C}_2$.
  - Si $\mathbf{C} \to_X \mathbf{C}_1$ et $\mathbf{C} \to_X \mathbf{C}_2$, $\mathbf{C} \to_X \mathbf{C}_1 \otimes_X \mathbf{C}_2$ et donc $\mathbf{C} \to_X \mathbf{C}_1 \otimes_X \mathbf{C}_2 \to_X \mathbf{Core}_X(\mathbf{C}_1 \otimes_X \mathbf{C}_2)$.

# Treillis (démonstration)

- Du lemme 2.4 (3,4) on a que :
  - $\mathbf{Core}_X(\mathbf{C}_1 \oplus_X \mathbf{C}_2)$ est la plus petite borne supérieure,
    - $\mathbf{C}_1 \to_X \mathbf{C}_1 \oplus_X \mathbf{C}_2 \to_X \mathbf{Core}_X(\mathbf{C}_1 \oplus_X \mathbf{C}_2)$, même chose pour $\mathbf{C}_2$.
    - Si $\mathbf{C}_1 \to_X \mathbf{C}$ et $\mathbf{C}_2 \to_X \mathbf{C}$, $\mathbf{C}_1 \oplus_X \mathbf{C}_2 \to_X \mathbf{C}$ et donc $\mathbf{Core}_X(\mathbf{C}_1 \oplus_X \mathbf{C}_2) \to_X \mathbf{C}_1 \oplus_X \mathbf{C}_2 \to_X \mathbf{C}$.
- $\mathbf{Core}_X(\mathbf{C}_1 \otimes_X \mathbf{C}_2)$ est la plus grande borne inférieure.
  - $\mathbf{Core}_X(\mathbf{C}_1 \otimes_X \mathbf{C}_2) \to_X \mathbf{C}_1 \otimes_X \mathbf{C}_2 \to_X \mathbf{C}_1$, même chose pour $\mathbf{C}_2$.
  - Si $\mathbf{C} \to_X \mathbf{C}_1$ et $\mathbf{C} \to_X \mathbf{C}_2$, $\mathbf{C} \to_X \mathbf{C}_1 \otimes_X \mathbf{C}_2$ et donc $\mathbf{C} \to_X \mathbf{C}_1 \otimes_X \mathbf{C}_2 \to_X \mathbf{Core}_X(\mathbf{C}_1 \otimes_X \mathbf{C}_2)$.

# Treillis (démonstration)

- Du lemme 2.4 (3,4) on a que :
  - $\mathbf{Core}_X(\mathbf{C}_1 \oplus_X \mathbf{C}_2)$ est la plus petite borne supérieure,
    - $\mathbf{C}_1 \rightarrow_X \mathbf{C}_1 \oplus_X \mathbf{C}_2 \rightarrow_X \mathbf{Core}_X(\mathbf{C}_1 \oplus_X \mathbf{C}_2)$, même chose pour $\mathbf{C}_2$.
    - Si $\mathbf{C}_1 \rightarrow_X \mathbf{C}$ et $\mathbf{C}_2 \rightarrow_X \mathbf{C}$, $\mathbf{C}_1 \oplus_X \mathbf{C}_2 \rightarrow_X \mathbf{C}$ et donc $\mathbf{Core}_X(\mathbf{C}_1 \oplus_X \mathbf{C}_2) \rightarrow_X \mathbf{C}_1 \oplus_X \mathbf{C}_2 \rightarrow_X \mathbf{C}$.
- $\mathbf{Core}_X(\mathbf{C}_1 \otimes_X \mathbf{C}_2)$ est la plus grande borne inférieure.
  - $\mathbf{Core}_X(\mathbf{C}_1 \otimes_X \mathbf{C}_2) \rightarrow_X \mathbf{C}_1 \otimes_X \mathbf{C}_2 \rightarrow_X \mathbf{C}_1$, même chose pour $\mathbf{C}_2$.
  - Si $\mathbf{C} \rightarrow_X \mathbf{C}_1$ et $\mathbf{C} \rightarrow_X \mathbf{C}_2$, $\mathbf{C} \rightarrow_X \mathbf{C}_1 \otimes_X \mathbf{C}_2$ et donc $\mathbf{C} \rightarrow_X \mathbf{C}_1 \otimes_X \mathbf{C}_2 \rightarrow_X \mathbf{Core}_X(\mathbf{C}_1 \otimes_X \mathbf{C}_2)$.

# Classes syntaxiques de formules

- Une formule est dite *primitive-positive* si elle est construite à partir des formules atomiques en n'utilisant que des $\wedge$ et des $\exists$.
- Une formule est dite *existentielle-positive* si elle est construite à partir des formules atomiques en n'utilisant que des $\vee$, $\wedge$ et des $\exists$.

# Classes syntaxiques de formules

- Une formule est dite *primitive-positive* si elle est construite à partir des formules atomiques en n'utilisant que des $\wedge$ et des $\exists$.
- Une formule est dite *existentielle-positive* si elle est construite à partir des formules atomiques en n'utilisant que des $\vee$, $\wedge$ et des $\exists$.

# Classes syntaxiques de formules

- Une formule est dite *primitive-positive* si elle est construite à partir des formules atomiques en n'utilisant que des $\wedge$ et des $\exists$.
- Une formule est dite *existentielle-positive* si elle est construite à partir des formules atomiques en n'utilisant que des $\vee$, $\wedge$ et des $\exists$.

# Lemme 2.13

- Pour toute formule primitive-positive $\theta$, il existe une structure finie $\mathbf{A}_\theta$ de taille $qcount(\theta)$ et de profondeur d'arborescence $qrank(\theta)$, telle que $\mathbf{A}_\theta \to \mathbf{B}$ ssi $\mathbf{B} \models \theta$ pour toute structure $\mathbf{B}$.

# Lemme 2.13

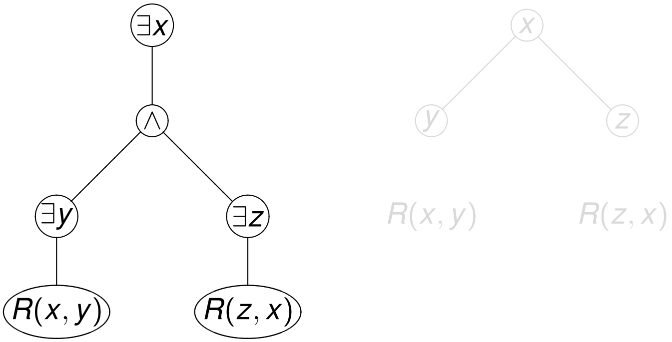
- Pour toute formule primitive-positive $\theta$, il existe une structure finie $\mathbf{A}_\theta$ de taille $qcount(\theta)$ et de profondeur d'arborescence $qrank(\theta)$, telle que $\mathbf{A}_\theta \to \mathbf{B}$ ssi $\mathbf{B} \models \theta$ pour toute structure $\mathbf{B}$.

# Exemple

$$\exists x(\exists y R(x,y) \wedge \exists z R(z,x))$$

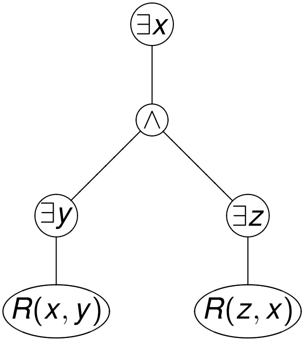
# Exemple

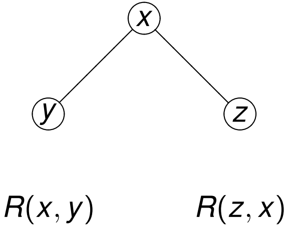
$$\exists x(\exists y R(x, y) \wedge \exists z R(z, x))$$



# Exemple

$$\exists x(\exists y R(x,y) \wedge \exists z R(z,x))$$



# Lemme 2.14

- Pour toute structure finie **A**, il existe une formule primitive positive $\theta_{\mathbf{A}}$ avec $|\mathbf{A}|$ quantificateurs et rang de quantification égal à $td(\mathbf{A})$, tel que $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ ssi $\mathbf{B} \models \theta_{\mathbf{A}}$ pour toute structure **B**.

# Lemme 2.14

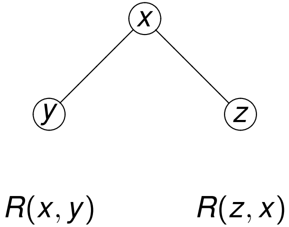
- Pour toute structure finie $\mathbf{A}$, il existe une formule primitive positive $\theta_{\mathbf{A}}$ avec $|\mathbf{A}|$ quantificateurs et rang de quantification égal à $td(\mathbf{A})$, tel que $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ ssi $\mathbf{B} \models \theta_{\mathbf{A}}$ pour toute structure $\mathbf{B}$.

# Exemple

$$\{x, y, z\} : R(x, y), R(z, x)$$

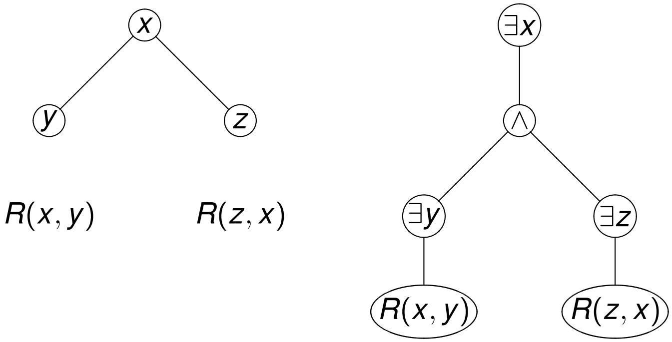
## Exemple

$$\{x, y, z\} : R(x, y), R(z, x)$$



# Exemple

$$\{x, y, z\} : R(x, y), R(z, x)$$



- Les opérateurs $\theta \mapsto \mathbf{A}_\theta$ et $\mathbf{A} \mapsto \theta_{\mathbf{A}}$ des lemmes 2.13 et 2.14 renversent les quasi-ordres $\vdash$ (implication logique) et $\rightarrow$ (homomorphisme).
  - $\theta_1 \vdash \theta_2$ ssi $\mathbf{A}_{\theta_2} \rightarrow \mathbf{A}_{\theta_1}$ (inversé dans l'article).
    - (=>) Par 2.13 $\mathbf{A}_{\theta_2} \rightarrow \mathbf{A}_{\theta_1}$ si $\mathbf{A}_{\theta_1} \models \theta_2$.
    - (<=) Si $\mathbf{B} \models \theta_1$, par 2.13 $\mathbf{A}_{\theta_1} \rightarrow \mathbf{B}$ et donc $\mathbf{A}_{\theta_2} \rightarrow \mathbf{A}_{\theta_1} \rightarrow \mathbf{B}$. Encore par 2.13, $\mathbf{B} \models \theta_2$.
  - $\mathbf{A}_2 \rightarrow \mathbf{A}_1$ ssi $\theta_{\mathbf{A}_1} \vdash \theta_{\mathbf{A}_2}$ (inversé dans l'article).
    - (=>) Si $\mathbf{B} \models \theta_{\mathbf{A}_1}$, par 2.14 $\mathbf{A}_1 \rightarrow \mathbf{B}$ et donc $\mathbf{A}_2 \rightarrow \mathbf{A}_1 \rightarrow \mathbf{B}$. Encore par 2.14, $\mathbf{B} \models \theta_{\mathbf{A}_2}$.
    - (<=) Par 2.14 $\mathbf{A}_2 \rightarrow \mathbf{A}_1$, si $\mathbf{A}_1 \models \theta_{\mathbf{A}_2}$.

# Opérateurs

- Les opérateurs $\theta \mapsto \mathbf{A}_\theta$ et $\mathbf{A} \mapsto \theta_{\mathbf{A}}$ des lemmes 2.13 et 2.14 renversent les quasi-ordres $\vdash$ (implication logique) et $\to$ (homomorphisme).
  - $\theta_1 \vdash \theta_2$ ssi $\mathbf{A}_{\theta_2} \to \mathbf{A}_{\theta_1}$ (inversé dans l'article).
    - (=>) Par 2.13 $\mathbf{A}_{\theta_2} \to \mathbf{A}_{\theta_1}$ si $\mathbf{A}_{\theta_1} \models \theta_2$.
    - (<=) Si $\mathbf{B} \models \theta_1$, par 2.13 $\mathbf{A}_{\theta_1} \to \mathbf{B}$ et donc $\mathbf{A}_{\theta_2} \to \mathbf{A}_{\theta_1} \to \mathbf{B}$. Encore par 2.13, $\mathbf{B} \models \theta_2$.
  - $\mathbf{A}_2 \to \mathbf{A}_1$ ssi $\theta_{\mathbf{A}_1} \vdash \theta_{\mathbf{A}_2}$ (inversé dans l'article).
    - (=>) Si $\mathbf{B} \models \theta_{\mathbf{A}_1}$, par 2.14 $\mathbf{A}_1 \to \mathbf{B}$ et donc $\mathbf{A}_2 \to \mathbf{A}_1 \to \mathbf{B}$. Encore par 2.14, $\mathbf{B} \models \theta_{\mathbf{A}_2}$.
    - (<=) Par 2.14 $\mathbf{A}_2 \to \mathbf{A}_1$, si $\mathbf{A}_1 \models \theta_{\mathbf{A}_2}$.

# Opérateurs

- Les opérateurs $\theta \mapsto \mathbf{A}_\theta$ et $\mathbf{A} \mapsto \theta_\mathbf{A}$ des lemmes 2.13 et 2.14 renversent les quasi-ordres $\vdash$ (implication logique) et $\rightarrow$ (homomorphisme).
  - $\theta_1 \vdash \theta_2$ ssi $\mathbf{A}_{\theta_2} \rightarrow \mathbf{A}_{\theta_1}$ (inversé dans l'article).
    - (=>) Par 2.13 $\mathbf{A}_{\theta_2} \rightarrow \mathbf{A}_{\theta_1}$ si $\mathbf{A}_{\theta_1} \models \theta_2$.
    - (<=) Si $\mathbf{B} \models \theta_1$, par 2.13 $\mathbf{A}_{\theta_1} \rightarrow \mathbf{B}$ et donc $\mathbf{A}_{\theta_2} \rightarrow \mathbf{A}_{\theta_1} \rightarrow \mathbf{B}$. Encore par 2.13, $\mathbf{B} \models \theta_2$.
  - $\mathbf{A}_2 \rightarrow \mathbf{A}_1$ ssi $\theta_{\mathbf{A}_1} \vdash \theta_{\mathbf{A}_2}$ (inversé dans l'article).
    - (=>) Si $\mathbf{B} \models \theta_{\mathbf{A}_1}$, par 2.14 $\mathbf{A}_1 \rightarrow \mathbf{B}$ et donc $\mathbf{A}_2 \rightarrow \mathbf{A}_1 \rightarrow \mathbf{B}$. Encore par 2.14, $\mathbf{B} \models \theta_{\mathbf{A}_2}$.
    - (<=) Par 2.14 $\mathbf{A}_2 \rightarrow \mathbf{A}_1$, si $\mathbf{A}_1 \models \theta_{\mathbf{A}_2}$.

# Opérateurs

- Les opérateurs $\theta \mapsto \mathbf{A}_\theta$ et $\mathbf{A} \mapsto \theta_\mathbf{A}$ des lemmes 2.13 et 2.14 renversent les quasi-ordres $\vdash$ (implication logique) et $\rightarrow$ (homomorphisme).
  - $\theta_1 \vdash \theta_2$ ssi $\mathbf{A}_{\theta_2} \rightarrow \mathbf{A}_{\theta_1}$ (inversé dans l'article).
    - (=>) Par 2.13 $\mathbf{A}_{\theta_2} \rightarrow \mathbf{A}_{\theta_1}$ si $\mathbf{A}_{\theta_1} \models \theta_2$.
    - (<=) Si $\mathbf{B} \models \theta_1$, par 2.13 $\mathbf{A}_{\theta_1} \rightarrow \mathbf{B}$ et donc $\mathbf{A}_{\theta_2} \rightarrow \mathbf{A}_{\theta_1} \rightarrow \mathbf{B}$. Encore par 2.13, $\mathbf{B} \models \theta_2$.
  - $\mathbf{A}_2 \rightarrow \mathbf{A}_1$ ssi $\theta_{\mathbf{A}_1} \vdash \theta_{\mathbf{A}_2}$ (inversé dans l'article).
    - (=>) Si $\mathbf{B} \models \theta_{\mathbf{A}_1}$, par 2.14 $\mathbf{A}_1 \rightarrow \mathbf{B}$ et donc $\mathbf{A}_2 \rightarrow \mathbf{A}_1 \rightarrow \mathbf{B}$. Encore par 2.14, $\mathbf{B} \models \theta_{\mathbf{A}_2}$.
    - (<=) Par 2.14 $\mathbf{A}_2 \rightarrow \mathbf{A}_1$, si $\mathbf{A}_1 \models \theta_{\mathbf{A}_2}$.

# Opérateurs

- Les opérateurs $\theta \mapsto \mathbf{A}_\theta$ et $\mathbf{A} \mapsto \theta_\mathbf{A}$ des lemmes 2.13 et 2.14 renversent les quasi-ordres $\vdash$ (implication logique) et $\to$ (homomorphisme).
  - $\theta_1 \vdash \theta_2$ ssi $\mathbf{A}_{\theta_2} \to \mathbf{A}_{\theta_1}$ (inversé dans l'article).
    - (=>) Par 2.13 $\mathbf{A}_{\theta_2} \to \mathbf{A}_{\theta_1}$ si $\mathbf{A}_{\theta_1} \models \theta_2$.
    - (<=) Si $\mathbf{B} \models \theta_1$, par 2.13 $\mathbf{A}_{\theta_1} \to \mathbf{B}$ et donc $\mathbf{A}_{\theta_2} \to \mathbf{A}_{\theta_1} \to \mathbf{B}$. Encore par 2.13, $\mathbf{B} \models \theta_2$.
  - $\mathbf{A}_2 \to \mathbf{A}_1$ ssi $\theta_{\mathbf{A}_1} \vdash \theta_{\mathbf{A}_2}$ (inversé dans l'article).
    - (=>) Si $\mathbf{B} \models \theta_{\mathbf{A}_1}$, par 2.14 $\mathbf{A}_1 \to \mathbf{B}$ et donc $\mathbf{A}_2 \to \mathbf{A}_1 \to \mathbf{B}$. Encore par 2.14, $\mathbf{B} \models \theta_{\mathbf{A}_2}$.
    - (<=) Par 2.14 $\mathbf{A}_2 \to \mathbf{A}_1$, si $\mathbf{A}_1 \models \theta_{\mathbf{A}_2}$.

- Les opérateurs $\theta \mapsto \mathbf{A}_\theta$ et $\mathbf{A} \mapsto \theta_\mathbf{A}$ des lemmes 2.13 et 2.14 renversent les quasi-ordres $\vdash$ (implication logique) et $\rightarrow$ (homomorphisme).
  - $\theta_1 \vdash \theta_2$ ssi $\mathbf{A}_{\theta_2} \rightarrow \mathbf{A}_{\theta_1}$ (inversé dans l'article).
    - (=>) Par 2.13 $\mathbf{A}_{\theta_2} \rightarrow \mathbf{A}_{\theta_1}$ si $\mathbf{A}_{\theta_1} \models \theta_2$.
    - (<=) Si $\mathbf{B} \models \theta_1$, par 2.13 $\mathbf{A}_{\theta_1} \rightarrow \mathbf{B}$ et donc $\mathbf{A}_{\theta_2} \rightarrow \mathbf{A}_{\theta_1} \rightarrow \mathbf{B}$. Encore par 2.13, $\mathbf{B} \models \theta_2$.
  - $\mathbf{A}_2 \rightarrow \mathbf{A}_1$ ssi $\theta_{\mathbf{A}_1} \vdash \theta_{\mathbf{A}_2}$ (inversé dans l'article).
    - (=>) Si $\mathbf{B} \models \theta_{\mathbf{A}_1}$, par 2.14 $\mathbf{A}_1 \rightarrow \mathbf{B}$ et donc $\mathbf{A}_2 \rightarrow \mathbf{A}_1 \rightarrow \mathbf{B}$. Encore par 2.14, $\mathbf{B} \models \theta_{\mathbf{A}_2}$.
    - (<=) Par 2.14 $\mathbf{A}_2 \rightarrow \mathbf{A}_1$, si $\mathbf{A}_1 \models \theta_{\mathbf{A}_2}$.

# Opérateurs

- Les opérateurs $\theta \mapsto \mathbf{A}_\theta$ et $\mathbf{A} \mapsto \theta_{\mathbf{A}}$ des lemmes 2.13 et 2.14 renversent les quasi-ordres $\vdash$ (implication logique) et $\to$ (homomorphisme).
  - $\theta_1 \vdash \theta_2$ ssi $\mathbf{A}_{\theta_2} \to \mathbf{A}_{\theta_1}$ (inversé dans l'article).
    - (=>) Par 2.13 $\mathbf{A}_{\theta_2} \to \mathbf{A}_{\theta_1}$ si $\mathbf{A}_{\theta_1} \models \theta_2$.
    - (<=) Si $\mathbf{B} \models \theta_1$, par 2.13 $\mathbf{A}_{\theta_1} \to \mathbf{B}$ et donc $\mathbf{A}_{\theta_2} \to \mathbf{A}_{\theta_1} \to \mathbf{B}$. Encore par 2.13, $\mathbf{B} \models \theta_2$.
  - $\mathbf{A}_2 \to \mathbf{A}_1$ ssi $\theta_{\mathbf{A}_1} \vdash \theta_{\mathbf{A}_2}$ (inversé dans l'article).
    - (=>) Si $\mathbf{B} \models \theta_{\mathbf{A}_1}$, par 2.14 $\mathbf{A}_1 \to \mathbf{B}$ et donc $\mathbf{A}_2 \to \mathbf{A}_1 \to \mathbf{B}$. Encore par 2.14, $\mathbf{B} \models \theta_{\mathbf{A}_2}$.
    - (<=) Par 2.14 $\mathbf{A}_2 \to \mathbf{A}_1$, si $\mathbf{A}_1 \models \theta_{\mathbf{A}_2}$.

## Cores et ppf

- Les correspondances $\mathbf{C} \mapsto \theta_{\mathbf{C}}$ et $\theta \mapsto \mathbf{Core}(\mathbf{A}_\theta)$ forment une bijection renversant l'ordre entre $(\mathcal{C}, \rightarrow)$ et l'ensemble $(\mathit{ppf}, \vdash)$, où *ppf* est l'ensemble des formules primitives-positives à équivalence logique près.
  - Comme un noyau d'une structure $\mathbf{A}$ est homomorphiquement équivalent à $\mathbf{A}$, l'opérateur $\mathbf{Core}(-)$ conserve l'ordre, donc nos deux correspondances renversent l'ordre.

# Cores et ppf

- Les correspondances $\mathbf{C} \mapsto \theta_{\mathbf{C}}$ et $\theta \mapsto \mathbf{Core}(\mathbf{A}_\theta)$ forment une bijection renversant l'ordre entre $(\mathcal{C}, \to)$ et l'ensemble $(\mathit{ppf}, \vdash)$, où *ppf* est l'ensemble des formules primitives-positives à équivalence logique près.
  - Comme un noyau d'une structure $\mathbf{A}$ est homomorphiquement équivalent à $\mathbf{A}$, l'opérateur $\mathbf{Core}(-)$ conserve l'ordre, donc nos deux correspondances renversent l'ordre.

# Cores et ppf (suite)

- $\mathbf{C} \mapsto \theta_{\mathbf{C}} \mapsto \mathbf{Core}(\mathbf{A}_{\theta_{\mathbf{C}}})$ est l'identité (à $\cong$-près).
  - $\mathbf{C} \models \theta_{\mathbf{C}} \overset{(2.13)}{\Rightarrow} \mathbf{Core}(\mathbf{A}_{\theta_{\mathbf{C}}}) \rightleftarrows \mathbf{A}_{\theta_{\mathbf{C}}} \to \mathbf{C}$.
  - $\mathbf{A}_{\theta_{\mathbf{C}}} \models \theta_{\mathbf{C}} \overset{(2.14)}{\Rightarrow} \mathbf{C} \to \mathbf{A}_{\theta_{\mathbf{C}}} \rightleftarrows \mathbf{Core}(\mathbf{A}_{\theta_{\mathbf{C}}})$.
  - $\mathbf{C} \cong \mathbf{Core}(\mathbf{A}_{\theta_{\mathbf{C}}})$ car un seul élément de $\mathcal{C}$ est homomorphiquement équivalent à $\mathbf{A}$.
- $\theta \mapsto \mathbf{Core}(\mathbf{A}_{\theta}) \mapsto \theta_{\mathbf{Core}(\mathbf{A}_{\theta})}$ est l'identité (à équivalence logique près).
  - $\mathbf{B} \models \theta \overset{(2.13)}{\Leftrightarrow} \mathbf{Core}(\mathbf{A}_{\theta}) \rightleftarrows \mathbf{A}_{\theta} \to \mathbf{B} \overset{(2.13)}{\Leftrightarrow} \mathbf{B} \models \theta_{\mathbf{Core}(\mathbf{A}_{\theta})}$

# Cores et ppf (suite)

- $\mathbf{C} \mapsto \theta_{\mathbf{C}} \mapsto \mathbf{Core}(\mathbf{A}_{\theta_{\mathbf{C}}})$ est l'identité (à $\cong$-près).
  - $\mathbf{C} \models \theta_{\mathbf{C}} \overset{(2.13)}{\Rightarrow} \mathbf{Core}(\mathbf{A}_{\theta_{\mathbf{C}}}) \rightleftarrows \mathbf{A}_{\theta_{\mathbf{C}}} \to \mathbf{C}$.
  - $\mathbf{A}_{\theta_{\mathbf{C}}} \models \theta_{\mathbf{C}} \overset{(2.14)}{\Rightarrow} \mathbf{C} \to \mathbf{A}_{\theta_{\mathbf{C}}} \rightleftarrows \mathbf{Core}(\mathbf{A}_{\theta_{\mathbf{C}}})$.
  - $\mathbf{C} \cong \mathbf{Core}(\mathbf{A}_{\theta_{\mathbf{C}}})$ car un seul élément de $\mathcal{C}$ est homomorphiquement équivalent à $\mathbf{A}$.
- $\theta \mapsto \mathbf{Core}(\mathbf{A}_\theta) \mapsto \theta_{\mathbf{Core}(\mathbf{A}_\theta)}$ est l'identité (à équivalence logique près).
  - $\mathbf{B} \models \theta \overset{(2.13)}{\Leftrightarrow} \mathbf{Core}(\mathbf{A}_\theta) \rightleftarrows \mathbf{A}_\theta \to \mathbf{B} \overset{(2.13)}{\Leftrightarrow} \mathbf{B} \models \theta_{\mathbf{Core}(\mathbf{A}_\theta)}$

# Cores et ppf (suite)

- $\mathbf{C} \mapsto \theta_{\mathbf{C}} \mapsto \mathbf{Core}(\mathbf{A}_{\theta_{\mathbf{C}}})$ est l'identité (à $\cong$-près).
  - $\mathbf{C} \models \theta_{\mathbf{C}} \overset{(2.13)}{\Rightarrow} \mathbf{Core}(\mathbf{A}_{\theta_{\mathbf{C}}}) \rightleftarrows \mathbf{A}_{\theta_{\mathbf{C}}} \to \mathbf{C}$.
  - $\mathbf{A}_{\theta_{\mathbf{C}}} \models \theta_{\mathbf{C}} \overset{(2.14)}{\Rightarrow} \mathbf{C} \to \mathbf{A}_{\theta_{\mathbf{C}}} \rightleftarrows \mathbf{Core}(\mathbf{A}_{\theta_{\mathbf{C}}})$.
  - $\mathbf{C} \cong \mathbf{Core}(\mathbf{A}_{\theta_{\mathbf{C}}})$ car un seul élément de $\mathcal{C}$ est homomorphiquement équivalent à $\mathbf{A}$.
- $\theta \mapsto \mathbf{Core}(\mathbf{A}_{\theta}) \mapsto \theta_{\mathbf{Core}(\mathbf{A}_{\theta})}$ est l'identité (à équivalence logique près).
  - $\mathbf{B} \models \theta \overset{(2.13)}{\Leftrightarrow} \mathbf{Core}(\mathbf{A}_{\theta}) \rightleftarrows \mathbf{A}_{\theta} \to \mathbf{B} \overset{(2.13)}{\Leftrightarrow} \mathbf{B} \models \theta_{\mathbf{Core}(\mathbf{A}_{\theta})}$

UQÀM Université du Québec à Montréal

# Cores et ppf (suite)

- $\mathbf{C} \mapsto \theta_{\mathbf{C}} \mapsto \mathbf{Core}(\mathbf{A}_{\theta_{\mathbf{C}}})$ est l'identité (à $\cong$-près).
  - $\mathbf{C} \models \theta_{\mathbf{C}} \overset{(2.13)}{\Rightarrow} \mathbf{Core}(\mathbf{A}_{\theta_{\mathbf{C}}}) \rightleftarrows \mathbf{A}_{\theta_{\mathbf{C}}} \to \mathbf{C}$.
  - $\mathbf{A}_{\theta_{\mathbf{C}}} \models \theta_{\mathbf{C}} \overset{(2.14)}{\Rightarrow} \mathbf{C} \to \mathbf{A}_{\theta_{\mathbf{C}}} \rightleftarrows \mathbf{Core}(\mathbf{A}_{\theta_{\mathbf{C}}})$.
  - $\mathbf{C} \cong \mathbf{Core}(\mathbf{A}_{\theta_{\mathbf{C}}})$ car un seul élément de $\mathcal{C}$ est homomorphiquement équivalent à **A**.
- $\theta \mapsto \mathbf{Core}(\mathbf{A}_\theta) \mapsto \theta_{\mathbf{Core}(\mathbf{A}_\theta)}$ est l'identité (à équivalence logique près).
  - $\mathbf{B} \models \theta \overset{(2.13)}{\Leftrightarrow} \mathbf{Core}(\mathbf{A}_\theta) \rightleftarrows \mathbf{A}_\theta \to \mathbf{B} \overset{(2.13)}{\Leftrightarrow} \mathbf{B} \models \theta_{\mathbf{Core}(\mathbf{A}_\theta)}$

# Cores et ppf (suite)

- $\mathbf{C} \mapsto \theta_{\mathbf{C}} \mapsto \mathbf{Core}(\mathbf{A}_{\theta_{\mathbf{C}}})$ est l'identité (à $\cong$-près).
  - $\mathbf{C} \models \theta_{\mathbf{C}} \overset{(2.13)}{\Rightarrow} \mathbf{Core}(\mathbf{A}_{\theta_{\mathbf{C}}}) \rightleftarrows \mathbf{A}_{\theta_{\mathbf{C}}} \to \mathbf{C}$.
  - $\mathbf{A}_{\theta_{\mathbf{C}}} \models \theta_{\mathbf{C}} \overset{(2.14)}{\Rightarrow} \mathbf{C} \to \mathbf{A}_{\theta_{\mathbf{C}}} \rightleftarrows \mathbf{Core}(\mathbf{A}_{\theta_{\mathbf{C}}})$.
  - $\mathbf{C} \cong \mathbf{Core}(\mathbf{A}_{\theta_{\mathbf{C}}})$ car un seul élément de $\mathcal{C}$ est homomorphiquement équivalent à $\mathbf{A}$.
- $\theta \mapsto \mathbf{Core}(\mathbf{A}_\theta) \mapsto \theta_{\mathbf{Core}(\mathbf{A}_\theta)}$ est l'identité (à équivalence logique près).
  - $\mathbf{B} \models \theta \overset{(2.13)}{\Leftrightarrow} \mathbf{Core}(\mathbf{A}_\theta) \rightleftarrows \mathbf{A}_\theta \to \mathbf{B} \overset{(2.13)}{\Leftrightarrow} \mathbf{B} \models \theta_{\mathbf{Core}(\mathbf{A}_\theta)}$

# Cores et ppf (suite)

- $\mathbf{C} \mapsto \theta_{\mathbf{C}} \mapsto \mathbf{Core}(\mathbf{A}_{\theta_{\mathbf{C}}})$ est l'identité (à $\cong$-près).
  - $\mathbf{C} \models \theta_{\mathbf{C}} \stackrel{(2.13)}{\Rightarrow} \mathbf{Core}(\mathbf{A}_{\theta_{\mathbf{C}}}) \rightleftarrows \mathbf{A}_{\theta_{\mathbf{C}}} \to \mathbf{C}$.
  - $\mathbf{A}_{\theta_{\mathbf{C}}} \models \theta_{\mathbf{C}} \stackrel{(2.14)}{\Rightarrow} \mathbf{C} \to \mathbf{A}_{\theta_{\mathbf{C}}} \rightleftarrows \mathbf{Core}(\mathbf{A}_{\theta_{\mathbf{C}}})$.
  - $\mathbf{C} \cong \mathbf{Core}(\mathbf{A}_{\theta_{\mathbf{C}}})$ car un seul élément de $\mathcal{C}$ est homomorphiquement équivalent à **A**.
- $\theta \mapsto \mathbf{Core}(\mathbf{A}_\theta) \mapsto \theta_{\mathbf{Core}(\mathbf{A}_\theta)}$ est l'identité (à équivalence logique près).
  - $\mathbf{B} \models \theta \stackrel{(2.13)}{\Leftrightarrow} \mathbf{Core}(\mathbf{A}_\theta) \rightleftarrows \mathbf{A}_\theta \to \mathbf{B} \stackrel{(2.13)}{\Leftrightarrow} \mathbf{B} \models \theta_{\mathbf{Core}(\mathbf{A}_\theta)}$

## Hom-minimalité

- Une structure **M** est un *modèle hom-minimal* d'un énoncé existentiel-positif $\psi$ si :
  - **M** $\models \psi$ et
  - **M** $\rightarrow$ **A**, pour toute structure **A**, telle que **A** $\models \psi$ et **A** $\rightarrow$ **M**.

# Hom-minimalité

- Une structure **M** est un *modèle hom-minimal* d'un énoncé existentiel-positif $\psi$ si :
  - **M** $\models \psi$ et
  - **M** $\rightarrow$ **A**, pour toute structure **A**, telle que **A** $\models \psi$ et **A** $\rightarrow$ **M**.

# Hom-minimalité

- Une structure **M** est un *modèle hom-minimal* d'un énoncé existentiel-positif $\psi$ si :
  - **M** $\models \psi$ et
  - **M** $\rightarrow$ **A**, pour toute structure **A**, telle que **A** $\models \psi$ et **A** $\rightarrow$ **M**.

# Hom-minimalité (suite)

- Du lemme 2.12 on sait qu'un énoncé existentiel-positif $\psi$ est la disjonction de ppf $\theta_1, \ldots, \theta_n$ (prenons cet ensemble minimal=on ne peut pas y enlever un terme=$\theta_i \nvdash \theta_j$).
- Du lemme 2.13 on a $\mathbf{A}_{\theta_1}, \ldots, \mathbf{A}_{\theta_n}$, qui sont hom-minimaux pour $\psi$.
  - $\mathbf{A}_{\theta_i} \models \theta_i$, donc $\psi$.
  - Si $\mathbf{A} \models \psi$, $\mathbf{A} \models \theta_j$ pour un $j$ (de 2.13 $\mathbf{A}_{\theta_j} \to \mathbf{A}$, donc on voudrait avoir $i = j$).
  - Si de plus $\mathbf{A} \to \mathbf{A}_{\theta_i}$, $\mathbf{A}_{\theta_i} \models \theta_j$ (préservation par homomorphismes). De 2.13 $\mathbf{A}_{\theta_j} \to \mathbf{A}_{\theta_i}$ et donc $\theta_i \vdash \theta_j$ et par minimalité, $i = j$.

# Hom-minimalité (suite)

- Du lemme 2.12 on sait qu'un énoncé existentiel-positif $\psi$ est la disjonction de ppf $\theta_1, \ldots, \theta_n$ (prenons cet ensemble minimal$=$on ne peut pas y enlever un terme$=\theta_i \nvdash \theta_j$).
- Du lemme 2.13 on a $\mathbf{A}_{\theta_1}, \ldots, \mathbf{A}_{\theta_n}$, qui sont hom-minimaux pour $\psi$.
  - $\mathbf{A}_{\theta_i} \models \theta_i$, donc $\psi$.
  - Si $\mathbf{A} \models \psi$, $\mathbf{A} \models \theta_j$ pour un $j$ (de 2.13 $\mathbf{A}_{\theta_j} \to \mathbf{A}$, donc on voudrait avoir $i = j$).
  - Si de plus $\mathbf{A} \to \mathbf{A}_{\theta_i}$, $\mathbf{A}_{\theta_i} \models \theta_j$ (préservation par homomorphismes). De 2.13 $\mathbf{A}_{\theta_j} \to \mathbf{A}_{\theta_i}$ et donc $\theta_i \vdash \theta_j$ et par minimalité, $i = j$.

# Hom-minimalité (suite)

- Du lemme 2.12 on sait qu'un énoncé existentiel-positif $\psi$ est la disjonction de ppf $\theta_1, \ldots, \theta_n$ (prenons cet ensemble minimal=on ne peut pas y enlever un terme=$\theta_i \not\vdash \theta_j$).
- Du lemme 2.13 on a $\mathbf{A}_{\theta_1}, \ldots, \mathbf{A}_{\theta_n}$, qui sont hom-minimaux pour $\psi$.
  - $\mathbf{A}_{\theta_i} \models \theta_i$, donc $\psi$.
  - Si $\mathbf{A} \models \psi$, $\mathbf{A} \models \theta_j$ pour un $j$ (de 2.13 $\mathbf{A}_{\theta_j} \to \mathbf{A}$, donc on voudrait avoir $i = j$).
  - Si de plus $\mathbf{A} \to \mathbf{A}_{\theta_i}$, $\mathbf{A}_{\theta_i} \models \theta_j$ (préservation par homomorphismes). De 2.13 $\mathbf{A}_{\theta_j} \to \mathbf{A}_{\theta_i}$ et donc $\theta_i \vdash \theta_j$ et par minimalité, $i = j$.

## Hom-minimalité (suite)

- Du lemme 2.12 on sait qu'un énoncé existentiel-positif $\psi$ est la disjonction de ppf $\theta_1, \ldots, \theta_n$ (prenons cet ensemble minimal$=$on ne peut pas y enlever un terme$=\theta_i \not\vdash \theta_j$).
- Du lemme 2.13 on a $\mathbf{A}_{\theta_1}, \ldots, \mathbf{A}_{\theta_n}$, qui sont hom-minimaux pour $\psi$.
  - $\mathbf{A}_{\theta_i} \models \theta_i$, donc $\psi$.
  - Si $\mathbf{A} \models \psi$, $\mathbf{A} \models \theta_j$ pour un $j$ (de 2.13 $\mathbf{A}_{\theta_j} \to \mathbf{A}$, donc on voudrait avoir $i = j$).
  - Si de plus $\mathbf{A} \to \mathbf{A}_{\theta_i}$, $\mathbf{A}_{\theta_i} \models \theta_j$ (préservation par homomorphismes). De 2.13 $\mathbf{A}_{\theta_j} \to \mathbf{A}_{\theta_i}$ et donc $\theta_i \vdash \theta_j$ et par minimalité, $i = j$.

# Hom-minimalité (suite)

- Du lemme 2.12 on sait qu'un énoncé existentiel-positif $\psi$ est la disjonction de ppf $\theta_1, \ldots, \theta_n$ (prenons cet ensemble minimal=on ne peut pas y enlever un terme=$\theta_i \not\vdash \theta_j$).
- Du lemme 2.13 on a $\mathbf{A}_{\theta_1}, \ldots, \mathbf{A}_{\theta_n}$, qui sont hom-minimaux pour $\psi$.
  - $\mathbf{A}_{\theta_i} \models \theta_i$, donc $\psi$.
  - Si $\mathbf{A} \models \psi$, $\mathbf{A} \models \theta_j$ pour un $j$ (de 2.13 $\mathbf{A}_{\theta_j} \to \mathbf{A}$, donc on voudrait avoir $i = j$).
  - Si de plus $\mathbf{A} \to \mathbf{A}_{\theta_i}$, $\mathbf{A}_{\theta_i} \models \theta_j$ (préservation par homomorphismes). De 2.13 $\mathbf{A}_{\theta_j} \to \mathbf{A}_{\theta_i}$ et donc $\theta_i \vdash \theta_j$ et par minimalité, $i = j$.

# Hom-minimalité (suite)

- Réciproquement un modèle hom-minimal de $\psi$ est homomorphiquement équivalent à l'un des $\mathbf{A}_{\theta_1}, \ldots, \mathbf{A}_{\theta_n}$. Son noyau est donc isomorphe à celui d'une de ces structures.
  - Comme $\mathbf{M} \models \psi$ on a que $\mathbf{M} \models \theta_i$ pour un $i$.
  - De 2.13, $\mathbf{A}_{\theta_i} \to \mathbf{M}$, mais par hom-minimalité de $M$, $\mathbf{M} \to \mathbf{A}_{\theta_i}$.

## Hom-minimalité (suite)

- Réciproquement un modèle hom-minimal de $\psi$ est homomorphiquement équivalent à l'un des $\mathbf{A}_{\theta_1}, \ldots, \mathbf{A}_{\theta_n}$. Son noyau est donc isomorphe à celui d'une de ces structures.
  - Comme $\mathbf{M} \models \psi$ on a que $\mathbf{M} \models \theta_i$ pour un $i$.
  - De 2.13, $\mathbf{A}_{\theta_i} \to \mathbf{M}$, mais par hom-minimalité de $M$, $\mathbf{M} \to \mathbf{A}_{\theta_i}$.

# Hom-minimalité (suite)

- Réciproquement un modèle hom-minimal de $\psi$ est homomorphiquement équivalent à l'un des $\mathbf{A}_{\theta_1}, \ldots, \mathbf{A}_{\theta_n}$. Son noyau est donc isomorphe à celui d'une de ces structures.
  - Comme $\mathbf{M} \models \psi$ on a que $\mathbf{M} \models \theta_i$ pour un $i$.
  - De 2.13, $\mathbf{A}_{\theta_i} \to \mathbf{M}$, mais par hom-minimalité de $M$, $\mathbf{M} \to \mathbf{A}_{\theta_i}$.

# Proposition 2.16

- Supposons que **M** soit un modèle hom-minimal fini d'un énoncé existentiel positif $\psi$. On a alors que $\mathit{qcount}(\psi) \geq |\mathbf{Core}(\mathbf{M})|$ et $\mathit{qrank}(\psi) \geq \mathit{td}(\mathbf{Core}(\mathbf{M}))$.

# Remarques

- Deux modèles hom-minimaux **M** et **N** d'un énoncé existentiel-positif sont soit homomorphiquement équivalents ($\mathbf{M} \rightleftarrows \mathbf{N}$), soit homomorphiquement incomparables ($\mathbf{M} \not\to \mathbf{N}$ et $\mathbf{N} \not\to \mathbf{M}$).
- L'ensemble $\{\mathbf{Core}(\mathbf{M}) : \mathbf{M}$ est un modèle hom-minimal fini de $\psi\}$ est une antichaîne dans $(\mathcal{C}, \to)$. Cette anti-chaîne (finie) caractérise complètement $\psi$ à équivalence logique près (il y a une bijection entre les anti-chaînes finies de $(\mathcal{C}, \to)$ et les énoncés existentiels-positifs à équivalence logique près).

# Remarques

- Deux modèles hom-minimaux **M** et **N** d'un énoncé existentiel-positif sont soit homomorphiquement équivalents (**M** $\rightleftarrows$ **N**), soit homomorphiquement incomparables (**M** $\not\to$ **N** et **N** $\not\to$ **M**).
- L'ensemble $\{$**Core**(**M**) : **M** est un modèle hom-minimal fini de $\psi\}$ est une antichaîne dans $(\mathcal{C}, \to)$. Cette anti-chaîne (finie) caractérise complètement $\psi$ à équivalence logique près (il y a une bijection entre les anti-chaînes finies de $(\mathcal{C}, \to)$ et les énoncés existentiels-positifs à équivalence logique près).

## Remarques

- Deux modèles hom-minimaux **M** et **N** d'un énoncé existentiel-positif sont soit homomorphiquement équivalents (**M** $\rightleftarrows$ **N**), soit homomorphiquement incomparables (**M** $\not\to$ **N** et **N** $\not\to$ **M**).
- L'ensemble $\{$**Core**(**M**) : **M** est un modèle hom-minimal fini de $\psi\}$ est une antichaîne dans $(\mathcal{C}, \to)$. Cette anti-chaîne (finie) caractérise complètement $\psi$ à équivalence logique près (il y a une bijection entre les anti-chaînes finies de $(\mathcal{C}, \to)$ et les énoncés existentiels-positifs à équivalence logique près).